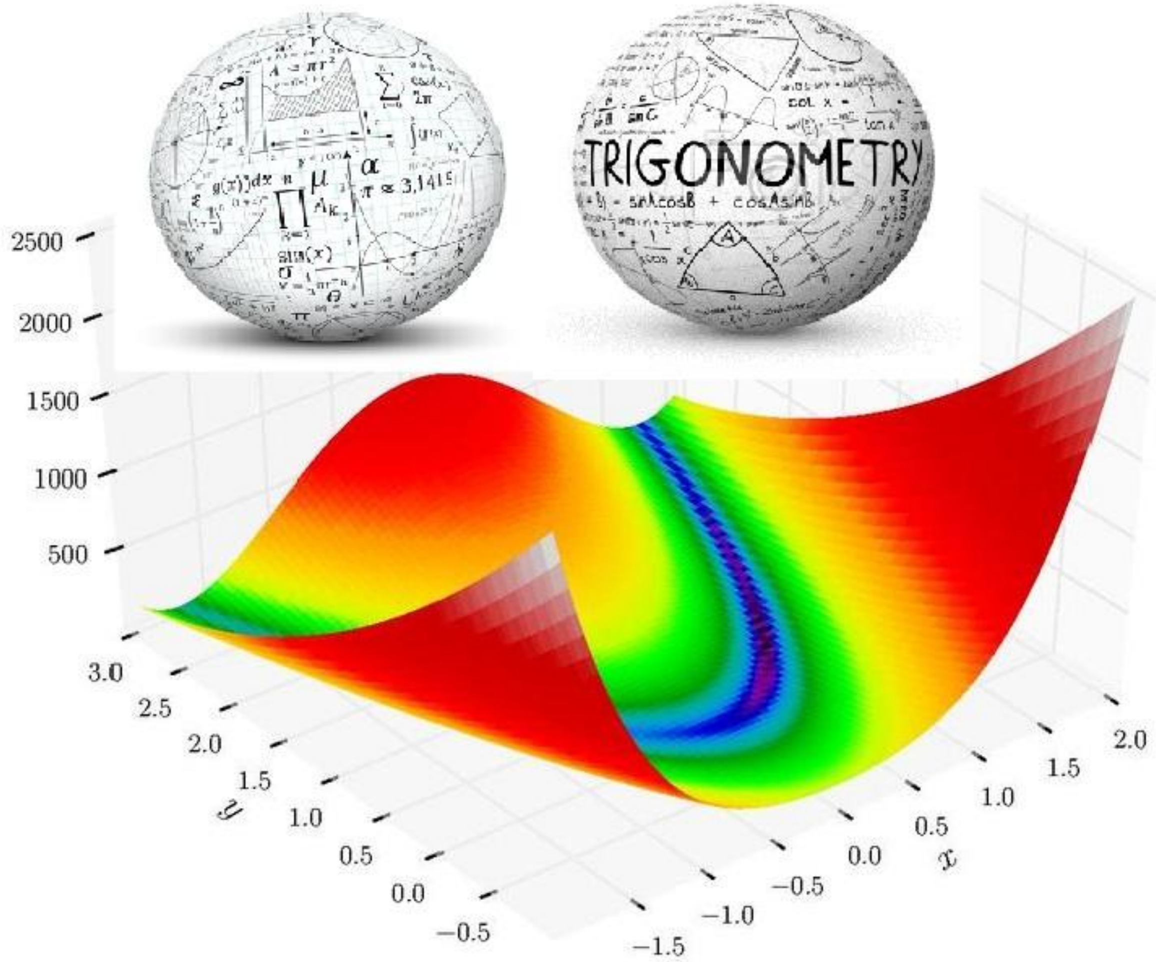
فرمولهای مهم فیزیک

و ریاضیات و اقتصاد



مِتین بِکتاس

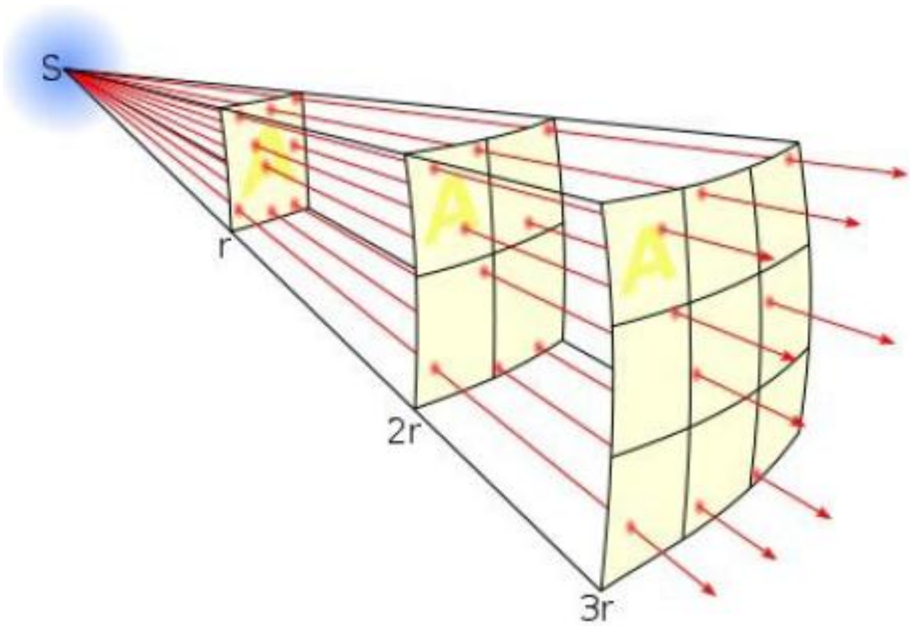
ترجمه: احسان کوثری نیا

فهرست مطالب

بخش اول: فیزیک مکانیک

شدت

در شرایط ایده آل، امواج صوت یا نور منتشر شده از یک منبع نقطه ای به صورت کروی از منبع منتشر می شوند. همچنانچه که فاصله آنها از منبع بیشتر می شود، انرژی امواج بر روی سطح بزرگتری پخش شده و از شدت امواج کاسته می شود. رابطـه ای کـه شـدت مـوج را در هـر فاصله ای از منبع محاسبه می کند به صورت زیر به دست می آید.



ابتدا باید تعریف شدت را بیان کرد. شدت یعنی مقدار انرژی دریافت شده از منبع بر واحد زمان بر واحد سطح. به بیـان دیگـر واحـد آن برابـر است با ژول بر ثانیه بر متر مربع یا همان وات بر متر مربع. برای محاسبه این کمیت کـافی اسـت تـوان منبـع (برحسـب وات) و فاصـله از آن (برحسب متر) مشخص باشد.

$$\mathbf{I = P / (4 \cdot \pi \cdot r^2)}$$

این رابطه یکی از پرکاربردترین فرمولهای فیزیک مکانیک بوده و بسیار ساده و سودمند است. مخرج کسر در واقع مسـاحت کـره ای اسـت بـا شعاع r که در بخشهای بعد نیز از آن استفاده می شود. پیش از پرداختن به مثالها، یک مقیاس شدت خاص که عموما در آکوسـتیک بـه کـار می رود، معرفی می شود. به جای بیان شدت صوت بر حسب وات بر متر مربع، می توان آن را با رابطه زیر به دسیبل تبدیل کرد:

$$dB \approx 120 + 4.34 \cdot \ln(I)$$

که در آن، ln تابع لگاریتم طبیعی است. برای مثال، شدت صوت I=0.00001 (وات بر متر مربع مربوط به ترافیـک شـلوغ) معـادل 70 dB است. این تبدیل باعث می شود تا از کارکردن با اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ پرهیز شود. جدول زیر مربوط به برخی مقادیر شدت صوت و معادل فیزیکی آنها است.

مقدار شدت (دسیبل)	معادل فیزیکی
0	آستانه شنوایی
20	نجوا کردن
60	مکالمه عادی
80	صدای جاروی برقی
110	ردیف جلو در کنسرت راک

130	آستانه دردناک شدن گوش
160	پارگی پرده گوش

اکنون به چند مثال پرداخته می شود:

فرض کنید اخیرا یک بلندگو با توان ۳۰۰ وات خریده اید و می خواهید آن را تا حداکثر توان آن امتحان کنید. برای دریافت حداکثر قدرت صدا، در فاصله تنها یک متر از آن نشسته اید. آیا می توان آن را تحمل کرد. برای بررسی این موضوع باید شدت صوت را در این فاصله محاسبه و مقدار دسیبل آن را به دست آورد.

$$I = 300\ W / (4 \cdot \pi \cdot (1\ m)^2) \approx 23.9\ W/m^2$$
$$dB \approx 120 + 4.34 \cdot \ln(23.9) \approx 134\ dB$$

این مقدار از آستانه دردناکی گوش فراتر است و لذا نمی توان آن را تحمل کرد. البته باعث پارگی پرده گوش نمی شود و اگر برای مدت طولانی تحت این شرایط قرار نداشته باشید خطری برای سلامتی شما نخواهد داشت. نکته دیگر آن است که بلندگو یک منبع نقطه ای نیست، بنابراین تمامی این مقادیر، برآوردهایی هستند که فرض شده فاصله شما از منبع چندان نزدیک نیست، لذا می توان در این شرایط منبع را با تقریب خوبی به صورت نقطه ای فرض کرد. هرچه فاصله شما از منبع بیشتر باشد، شباهت منبع به منبع نقطه ای بیشتر شده و برآوردهای محاسبه شده با این روابط بهتر با واقعیت انطباق خواهد داشت.

اکنون حالت برعکس مثال پیشین درنظر گرفته می شود. فرض کنید که در فاصله یک متری از بلندگو قرار گرفته اید. در چه توانی، پرده گوشتان پاره خواهد شد. از جدول می توان مشاهده کرد که این رویداد در شدت 160 dB رخ می دهد. برای استفاده از فرمول شدت، باید آن را برحسب واحد فیزیکی وات بر متر مربع تبدیل کرد.

$$160 \approx 120 + 4.34 \cdot \ln(I)$$
$$9.22 \approx \ln(I)$$

معکوس لگاریتم طبیعی ln، عدد اویلر e است. به بیان دیگر، e به توان ln(I) می شود I. بنابراین برای رهایی از لگاریتم طبیعی در این رابطه کافی است دو طرف رابطه به توان پایه e رسانده شود.

$$e^{9.22} \approx e^{\ln(I)}$$
$$10{,}100 \approx I$$

بنابراین، شدت صوت 160 دسیبل معادل I=10100 وات بر متر مربع است. در این شدت، پرده های گوش پاره می شوند. اکنون می توان به این پرسش که چه توانی می تواند در فاصله یک متری پرده گوش را پاره کند پاسخ داد.

$$10{,}100 = P / (4 \cdot \pi \cdot 1^2)$$
$$P \approx 126{,}000\ W$$

بنابراین نباید نگران پارگی پرده گوش ناشی از بلندگو بود. حتی قدرتمندترین بلندگوهای کنسرتهای راک نیز چنین توانی ندارند.

شدت نور خورشید که به زمین می رسد حدود I=1400 وات بر متر مربع است. با توجه به اینکه فاصله میان زمین و خورشید برابر با حدود ۱۵۰ میلیون کیلومتر است، توان خروجی خورشید چقدر است؟

$$I = P / (4 \cdot \pi \cdot r^2)$$
$$P = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$P = 1400\ W/m^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (150{,}000{,}000{,}000\ m)^2$$

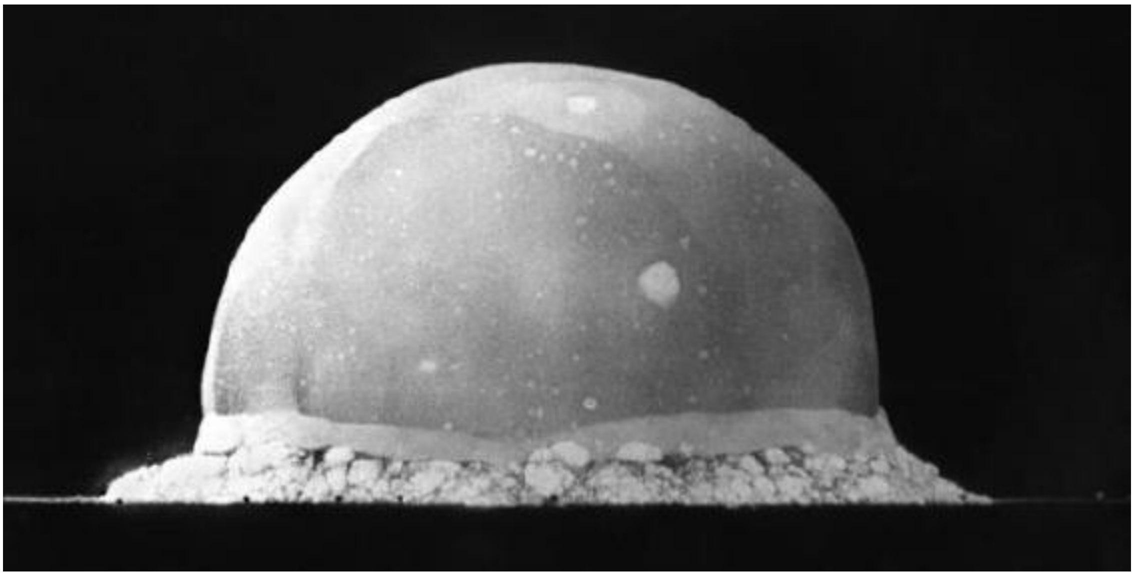
$$P \approx 4 \cdot 10^{26}\ W$$

این مقدار فراتر از حد درک ما است. در یک ثانیه خورشید به اندازه ای انرژی آزاد می کند که می تواند نیازهای کنونی انرژی ما را برای پانصد هزار سال تامین کند. البته، مقدار بسیار اندکی از این انرژی به زمین می رسد و تنها مقدار بسیار اندکی از آن می تواند به انرژی مفید تبدیل شود.

در بخش بعد، موج منتشر شونده شعاعی دیگری مورد بررسی قرار می گیرد. امیدواریم توجه داشته باشید که فیزیک و ریاضیات نیازی نیست که حتما دشوار باشند. برخی از مهمترین محاسبات را می توان با یک فرمول ساده و چند خط محاسبه انجام داد.

انفجارها

هنگامی که یک انفجار قوی رخ می دهد، یک موج شوک تشکیل شده که از منبع انفجار به صورت کروی منتشر می شود. جبهه موج شوک، توده هوایی که در اثر انفجار گرم شده و متراکم شده را از هوای اطراف جدا می کند. در شکل زیر می توانید کره شوک ناشی از انفجار ترینیتی (تثلیث)، نخستین بمب اتمی منفجر شده در تاریخ را مشاهده کنید.



با استفاده از مفهوم راه حلهای مشابه، تیلور و سدوف، دو فیزیکدان، فرمول ساده ای به دست آوردند که چگونگی رشد شعاع r (برحسب متر) این کره شوک را با زمان t (برحسب ثانیه) نشان می دهد. برای استفاده از این رابطه، دو کمیت دیگر نیز باید مشخص شود: انرژی انفجار E (برحسب ژول) و چگالی هوای محیط D (برحسب کیلوگرم بر متر مکعب). این رابطه عبارت است از:

$$\mathbf{r = 0.93 \cdot (E / D)^{0.2} \cdot t^{0.4}}$$

در انفجار ترینیتی (تثلیث) مقدار انرژی آزاد شده حدود ۲۰ هزار تن تی ان تی یا معادل ۸۴ ترا-ژول بود.

$$E = 84\ TJ = 84{,}000{,}000{,}000{,}000\ J$$

برای درک این مقدار انرژی، به این نکته توجه کنید: در سال ۲۰۰۷ کل مصرف انرژی خانوارها در کانادا حدود 1.4 TJ بوده است. اگر می توانستیم انرژی رها شده در انفجار تثلیث را به انرژی سودمند تبدیل کنیم، می توانستیم به مدت ۶۰ سال انرژی کل کشور کانادا را تامین کنیم.

به فرمول برگردیم. چگالی هوا در سطح دریا و ارتفاعات پایین حدودا برابر با D=1.25 کیلوگرم بر متر مکعب است. از اینرو، شعاع کره از رابطه زیر به دست می آید:

$$r = 542 \cdot t^{0.4}$$

پس از گذشت یک ثانیه (t=1)، جبهه شوک مسافت ۵۴۲ متر را پیموده است. بنابراین سرعت اولیه آن برابر با ۵۴۲ متر بر ثانیه یا ۱۹۵۰ کیلومتر بر ثانیه (۱۲۱۰ مایل بر ساعت) است. پس از ده ثانیه (t=10)، جبهه شوک مسافتی بالغ بر ۱۳۶۰ متر یا ۰,۸۵ مایل را طی کرده است. چقدر طول می کشد تا جبهه شوک به افرادی که در فاصله دو مایلی از انفجار قرار دارند برسد؟ دو مایل تقریبا برابر با ۳۲۰۰ متر است. با قرار دادن آن در معادله می توان نوشت:

$$3200 = 542 \cdot t^{0.4}$$
$$t \approx 85\ s$$

اکنون به بررسی تاثیر پارامترهای گوناگون در رابطه شعاع کره شوک بپردازیم:

- اگر زمان شش برابر افزایش یابد، شعاع کره دو برابر می شود. بنابراین چنانچه کره پس از ده ثانیه به فاصله ۰,۸۵ مایلی برسد، پس از گذشت ۶۰ ثانیه به فاصله ۱,۷ مایلی خواهد رسید. این بدان معنی است که سرعت جبهه شوک پیوسته در حال کاهش است.

  برای بررسی دو پارامتر دیگر بهتر است به جای شعاع کره، به بررسی سرعت اولیه (برحسب متر بر ثانیه) در یک زمان مشخص بپردازیم. همانگونه که در این مثال مشاهده شد، سرعت اولیه را با قرار دادن زمان t=1 می توان برآورد نمود، که به رابطه زیر می رسد:

$$v = 0.93 \cdot (E / D)^{0.2}$$

- اگر انرژی انفجار ۳۵ برابر شود، سرعت اولیه جبهه شوک دو برابر می شود. بنابراین برای یک انفجار اتمی ۷۰۰ کیلوتن (20 kt *35) تی ان تی، سرعت اولیه تقریبا برابر با ۱۰۸۴ متر بر ثانیه (2 * 542) خواهد بود.
- چگالی اتمسفر رفتار معکوس دارد. اگر ۳۵ برابر افزایش یابد، سرعت نصف می شود. بنابراین اگر آزمایش انفجار در ارتفاع حدود ۲۰ مایلی انجام شود (که در این ارتفاع چگالی اتمسفر تنها حدود یک سی و پنجم مقدار آن بر روی زمین است)، جبهه شوک با سرعتی برابر با ۱۰۸۴ متر بر ثانیه منتشر خواهد شد.

زمینه دیگر کاربرد فرمول تیلور-سدوف عموما در فیزیک کهکشانی است، که برای مدل کردن انفجارهای اَبرنواَخترها به کار می رود. از آنجا که انرژی آزاد شده در این انفجار بسیار عظیم تر از تمامی انفجارهای اتمی است و چگالی محیط پیرامون آنها نیز بسیار اندک است، نرخ انبساط اولیه آنها بسیار زیاد است.

مخروط ماخ

هنگامی که جسمی سریعتر از سرعت صوت حرکت می کند، پیش از آنکه امواج صوتی جسم به ناظر برسد، خود جسم از ناظر عبور خواهد کرد. این امواج به گونه ای متراکم می شوند که جبهه شوک تشکیل می شود. بنابراین به جای آنکه صوت به تدریج که به ناظر می رسد شدت آن افزایش یابد، ناظر هیچ چیزی نمی شنود تا اینکه جبهه موج با یک صدای ناگهانی و شبیه انفجار فرا می رسد.

به لحاظ هندسی جبهه شوک به صورت یک مخروط در اطراف جسم شکل می گیرد، که تحت شرایط خاصی حتی با چشم غیرمسلح نیز قابل مشاهده است (به تصویر نگاه کنید). فرمولی که در این بخش معرفی می شود مربوط به زاویه نیم-راس مخروط ماخ است. این زاویه با نماد حرف یونانی θ نشان داده شده که در تصویر مشخص شده است.

زاویه ماخ را می توان با مشخص بودن سرعت جسم v (برحسب متر بر ثانیه) و سرعت صوت c (بر حسب متر بر ثانیه) به دست آورد:

$$\sin \theta = c / v$$

اکنون به یک مثال پرداخته می شود.

یک جنگنده جت با سرعت v=500 متر بر ثانیه به سمت هدف خود پرواز می کند. جنگنده در ارتفاع نزدیک بـه زمـین پـرواز مـی کند و بنابراین، سرعت صوت تقریبا برابر با c=340 متر بر ثانیه است. از اینرو:

$$\sin \theta = 340 / 500 = 0.68$$
$$\theta = \arcsin(0.68) \approx 43°$$

در تصویر فوق زاویه حدود ۶۲ درجه است. هنگام ثبت این تصویر، سرعت جت چقدر بوده است؟ سرعت صـوت را برابـر c=340 متر بر ثانیه فرض می کنیم.

$$\sin 62° = 340 / v$$
$$0.88 = 340 / v$$
$$v = 340 / 0.88 \approx 385 \text{ m/s} \approx 1390 \text{ km/h} \approx 860 \text{ mph}$$

فرمول دیگری نیز وجود دارد که می تواند در محاسبه زاویه ماخ (یا سرعت حرکت جسم) سودمند باشد. دمای هوا با ارتفاع تغییـر مـی کنـد. هرچه بالاتر برویم، دما کاهش می یابد. به طور متوسط به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع، دما به میزان ۶ درجه سانتیگراد کـاهش مـی یابـد. بنابراین هنگامی که دمای هوا روی زمین برابر با ۲۰ درجه سانتیگراد باشد، انتظار می رود دمـا در ارتفـاع ۱۰ کیلـومتری حـدود 40- درجـه سانتیگراد باشد.

چرا در اینجا دما مورد توجه قرار گرفته است؟ درست است که دما در فرمول فوق نقشی ایفا نمی کند، ولی سرعت صوت به دما وابسته اسـت. هرچه دما بالاتر باشد، سرعت انتشار امواج صوتی بیشتر می شود. فرمول زیر برای تقریب سرعت صوت c (برحسب متر بر ثانیه) و دمـای هـوا (برحسب درجه سانتیگراد) به کار می رود.

$$c = 331 \cdot \text{sq root} (1 + T / 273)$$

در دمای T=20 درجه سانتیگراد، سرعت امواج صوتی تقریبا برابر با ۳۴۳ متر بر ثانیه است. هنگامی که ارتفاع از سطح زمین به حدود ۱۰ کیلومتری می رسد، که تقریبا همان ارتفاع پرواز هواپیماهای بزرگ است، دما به حدود T=-40 درجه سانتیگراد کاهش می یابد و سرعت صوت به حدود ۳۰۶ متر بر ثانیه می رسد. در این ارتفاع امواج صوتی حدود ۱۰ درصد کندتر منتشر می شوند!

پژواک

هنگامی که در یک اتاق بسیار بزرگ، دست می زنید، می توانید ماندگاری صدا را برای زمان کوتاهی متوجه شوید. دلیل این پدیده آن است که امواج صوتی بین دیوارها به جلو و عقب منعکس می شوند و الگویی پیچیده از تعداد زیادی بازتاب را تشکیل می دهند. در انتهای قرن نوزدهم، والاس کلمنت سابین در دانشگاه هاروارد یک مطالعه تجربی بر روی زمان پژواک انجام داده و فرمولی تقریبی برای آن ارایه کرد.
زمان پژواک مدنظر ما به زمانی گفته می شود که شدت صوت به ۶۰ دسیبل کاهش پیدا کند.
این کمیت به چهار پارامتر وابسته است: حجم اتاق V (برحسب متر مکعب)، ضریب جذب سطوح a (پارامتر بی بعد) و در نهایت ضریب جذب هوا b (برحسب معکوس متر). از این پارامترها می توان با استفاده از فرمول سابین، برآوردی از زمان پژواک T (برحسب ثانیه) به دست آورد:

$$\mathbf{T = 0.16 \cdot V / (A \cdot a + V \cdot b)}$$

برای دیوارهای معمولی آجری و گچی ضریب جذب برابر با حدود a=0.03 است، این مقدار برای چوب برابر با a=0.3 و برای پانلهای آکوستیک تا حدود a=0.8 می باشد. همچنین ضریب جذب هوا در رطوبت ۵۰ درصد تقریبا برابر با b=0.02 معکوس متر است.

فرض کنید در یک سالن بزرگ مستطیل شکل به ابعاد ۳۰ در ۳۰ در ۵ متر قرار دارید. با فرض مقادیر جذب ذکر شده، زمان پژواک برای این سالن چقدر است؟

ابتدا باید حجم سالن را به دست آورد:

$$V = 30\ m \cdot 30\ m \cdot 5\ m = 4500\ m^3$$

و مساحت سطح پیرامونی سالن برابر است با:

$$A = 2 \cdot (30\ m \cdot 30\ m + 30\ m \cdot 5\ m + 30\ m \cdot 5\ m)$$
$$A = 2400\ m^2$$

با جایگذاری در فرمول سابین، زمان پژواک برابر است با:

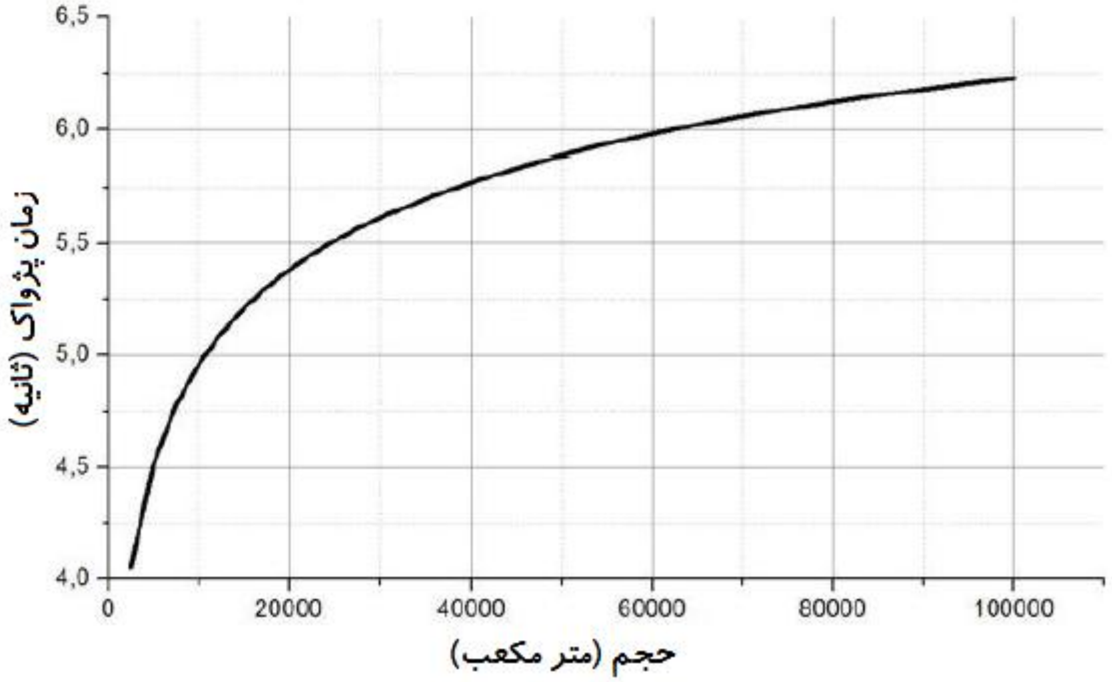
$$T = 0.16 \cdot 4500\ m^3 / (\ 2400\ m^2 \cdot 0.03 + 4500\ m^3 \cdot 0.02\ 1/m)$$
$$T \approx 4.4\ s$$

باید توجه داشت که برای انطباق واحدها، ثابت 0.16 دارای واحد ثانیه بر متر است.

اگر زمان پژواک به دست آمده به نظرتان زیاد است، به خاطر داشته باشید هنگامی که سالن حاوی تجهیزات و افراد باشد (که معمولا هم این گونه است)، این زمان به طرز چشمگیری کاهش می یابد.
اما چگونه زمان پژواک با ابعاد سالن و ضرایب جذب تغییر می کند؟
دو پارامتر حجم و سطح پیرامونی سالن را نمی توان مستقل از یکدیگر بررسی کرد، چرا که به هم وابسته اند. مساحت سطح تقریبا با توان دوسوم حجم متناسب است، این بدان معنی است که در مجموع، زمان پژواک با ریشه سوم حجم برای اتاقهای کوچک افزایش می یابد و برای

اتاقهای بزرگ به مقدار حدی می رسد. مقدار حدی آن برابر با 0.16/b یا حدود ۸ ثانیه برای رطوبت ۵۰ درصد است. پس از آن دیگر با بزرگتر شدن اتاق، زمان پژواک افزایش نمی یابد.

در شکل زیر تغییرات زمان پژواک با حجم ترسیم شده و می توان مشاهده کرد که چگونه با افزایش حجم، منحنی به خط راست تبدیل شده و به مقدار حدی نزدیک می شود.



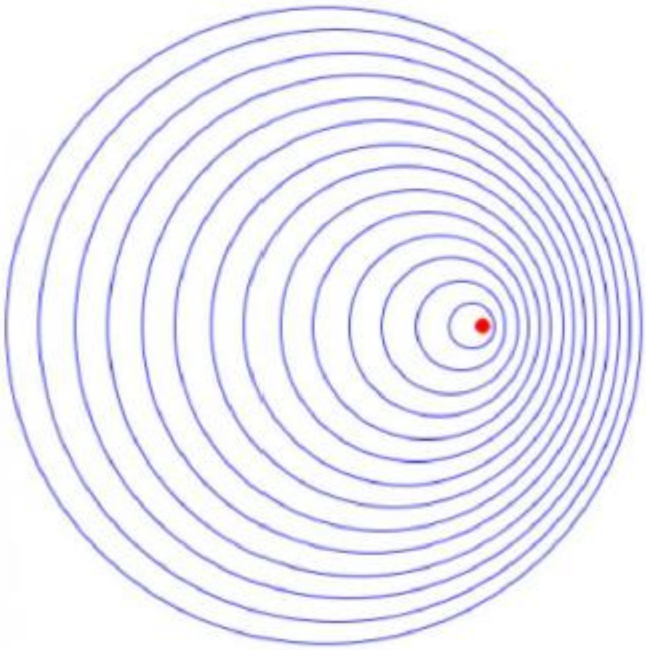
اگر ضرایب جذب افزایش یابد، زمان پژواک کاهش می یابد. برای مثال، اگر دیوارهای سالن با پانلهای آکوستیک باکیفیت پوشانده شوند، زمان پژواک به حدود 0.4 ثانیه افت خواهد کرد.

به خاطر داشته باشید که این فرمول صرفا یک تقریب اولیه مناسب به شمار می رود. در واقعیت، فرآیند بازتاب صوت به صورت پیچیده ای به هندسه خاص اتاق وابسته است. دو سالن با حجم، مساحت سطح و ضرایب جذب یکسان، همچنان زمانهای پژواک متفاوتی می توانند داشته باشند.

پدیده داپلر

آیا تاکنون به صدای آژیر یک خودروی پلیس که با سرعت در حال حرکت است به دقت گوش داده اید؟ اگر پاسخ مثبت است، احتمالا متوجه یک پدیده عجیب صوتی نیز شده اید. هنگامی که خودروی پلیس به شما نزدیک می شود فرکانس صدای آژیر زیاد است (صدا زیر است). در لحظه ای که خودرو از کنار شما عبور می کند، فرکانس صدا ناگهان کاهش یافته و صدا بم می شود و همچنان نیز بم باقی خواهد ماند. چه اتفاقی رخ می دهد؟

اگر یک منبع صوت در حال حرکت باشد، امواج صوتی در جهت حرکت، فشرده می شوند. این بدان معنی است که طول موج کوتاهتر شده و متناسبا فرکانس موج افزایش می یابد. بنابراین همچنان که خودروی پلیس به شما نزدیک می شود، امواج صوتی فشرده شده ای از آژیر آن دریافت می کنید.



برعکس این پدیده هنگامی رخ می دهد که امواج صوتی برخلاف جهت حرکت خودرو منتشر شوند. در این حالت طول موج آنها بلندتر شده و فرکانس آنها کاهش می یابد. این نوع امواج را پس از آنکه خودروی پلیس از شما عبور می کند، دریافت می کنید. تنها در لحظه ای که خودرو از کنار شما عبور می کند می توانید آهنگ واقعی آژیر را بشنوید.

این پدیده تنها به امواج صوتی محدود نمی شود، بلکه در مورد نور نیز رخ می دهد. ستاره ها و کهکشانها ممکن است به سمت زمین یا به دور از زمین در حال حرکت باشند که سبب می شود تغییر اندکی در فرکانس نور (رنگ) آنها ایجاد شود. این تغییر رنگ به قرمز یا آبی عموما توسط ستاره شناسان برای یافتن سرعت شعاعی اخترها به کار می رود.

اکنون به فرمول این پدیده بپردازیم. سه کمیت ورودی برای این رابطه مورد نیاز می باشد: فرکانس اولیه منبع f (برحسب هرتز)، سرعت نزدیک شدن منبع به ناظر v (برحسب متر بر ثانیه) و سرعت صوت c (برحسب متر بر ثانیه) می باشد. فرکانس مشاهده شده از رابطه زیر به دست می آید:

$$f' = f / (1 - v / c)$$

خودرویی که دارای آژیری با فرکانس f=440 Hz است با سرعت v=36 m/s به شما نزدیک می شود. سرعت صوت حدود c=340 m/s است. فرکانس صوتی که شما دریافت می کنید چقدر است؟

$$f' = 440\ \text{Hz} / (1 - 36 / 340) \approx 492\ Hz$$

بنابراین اثر داپلر، آهنگ صدا را به اندازه دو نیم تُن از نُت اولیه جابجا می کند. این جابجایی نوا به خوبی قابل تشخیص است.

اکنون به بررسی تاثیر تغییرات پارامترهای ورودی بر فرکانس دریافت شده توسط ناظر می پردازیم:

اگر فرکانس منبع دو برابر شود، فرکانس دریافت شده نیز دو برابر خواهد شد. بنابراین در مثال فوق، فرکانس منبع ۸۸۰ هرتز به فرکانس دریافتی ۹۸۴ هرتز تبدیل خواهد شد. در اینجا نیز آهنگ به اندازه دو نیم تُن جابجا می شود.

اگر سرعت منبع افزایش یابد، فرکانس دریافتی نیز افزایش می یابد. در سرعت ۷۲ متر بر ثانیه فرکانس به مقدار ۵۵۸ هرتز افزایش می یابد که حدود چهار نیم تُن از آهنگ اولیه بیشتر است.

تا اینجا حالت نزدیک شدن منابع صوتی مورد بررسی قرار گرفت. در حالتی که منبع صوتی از ناظر دور می شود، کافی است در رابطه داپلر علامت منفی با علامت مثبت جایگزین شود.

مجددا خودرو صوتی را با فرکانس ۴۴۰ هرتز منتشر می کند ولی این بار از شما با سرعت ۳۶ متر بر ثانیه دور می شود. چه فرکانسی دریافت می کنید؟

$$f' = 440 \text{ Hz} / (1 + 36 / 340) \approx 398 \text{ Hz}$$

جابجایی فرکانس برابر حدود دو نیم تُن است، اما این بار به فرکانس پایینتر.

هنگامی که منبع با سرعتی برابر یا بیشتر از سرعت امواجی که منتشر می کند حرکت کند، رابطه نخست دیگر صادق نخواهد بود. مشخصا در این حالت شما هیچ صدایی را از منبع نمی شنوید زیرا پیش از رسیدن امواج، خود منبع به شما خواهد رسید. این پدیده را پیشتر در بخش «مخروط ماخ» مورد بررسی قرار داده ایم.

محاسبه گردبادها

در این بخش می خواهیم به محاسبه گردبادها بپردازیم. فرمول مربوطه اصطلاحا رابطه رانکین نامیده می شود که در بین فیزیکدانان و ریاضی دانان چندان شناخته شده نیست، ولی این موضوع از اهمیت آن نمی کاهد.

به غیر از پارامتر اندازه، یکی از کمیتهای مهمی که برای مشخص کردن یک گردباد به کار می رود، اختلاف فشار p (که معمولا بر حسب واحد میلی بار یا به طور مختصر mb بیان می شود) بین مرکز و پیرامون گردباد است. هوا همواره از فشار بالا به سمت فشار پایین جریان می یابد لذا هنگامی که ناحیه ای با فشار پایین شکل می گیرد، جریان هوا به سمت آن آغاز می شود. در اثر دوران زمین، جریان ایجاد شده مستقیم نخواهد بود. هوا به سمت ناحیه کم-فشار جریانی گردابی خواهد داشت. هرچه اختلاف فشار بیشتر باشد، جریان هوا شدیدتر خواهد بود.

برای شروع، فرض می کنیم که این اختلاف فشار در طول عمر گردباد ثابت باشد. بعدا این فرض واقعی تر شده و محاسبات مربوط به تقویت و تضعیف گردبادها نیز انجام می شود. اما فعلا، تنها دو کمیت مورد نظر می باشد: فاصله از ناظر تا مرکز گردباد و سرعت باد v در این فاصله.

طبق فرمول رانکین، عبارت زیر با تغییر موقعیت گردباد، ثابت مانده و تغییر نمی کند.

$$\mathbf{v \cdot r^{0.6} = constant}$$

راهبرد حل مساله به این شکل خواهد بود: ابتدا با استفاده از داده های موجود (فاصله و سرعت باد) مقدار ثابت به دست می آید، سپس می توانیم برآوردی برای سرعت باد در هر فاصله ای داشته باشیم. توجه داشته باشید که طبق این رابطه، با سه برابر شدن فاصله از مرکز گردباد، سرعت باد نصف می شود.

فرض کنید گردبادی در حال نزدیک شدن است و طبق گزارش هواشناسی هم اکنون حدود ۶۰۰ مایل از شهر ما فاصله دارد. سرعت باد اکنون حدود ۲۰ مایل بر ساعت است. از تصاویر ماهواره ای می توان پیش بینی کرد که گردباد تا فاصله ۱۰۰ مایلی شهر برسد. در این حالت بیشینه سرعت باد مورد انتظار چقدر خواهد بود؟

ابتدا باید مقدار ثابت معادله را از داده های موجود محاسبه کرد:

$$20 \cdot 600^{0.6} \approx 930$$

اکنون می توان معادله ای برای بیشینه سرعت باد به دست آورد. از آنجا که سرعت برحسب مایل بر ساعت وارد شده، نتیجه نیز با همان واحد خواهد بود.

$$v \cdot 100^{0.6} \approx 930$$
$$v \approx 58 \text{ mph}$$

به همین سادگی محاسبه انجام می شود. اما به یاد داشته باشید که فرض شده قدرت گردباد هنگام نزدیک شدن همچنـان ثابـت اسـت. ایـن فرض واقعی نیست و باید اختلاف فشار در محاسبات لحاظ شود. در حالتی که قدرت گردباد در حال تغییر است، اختلاف فشـار p بـه صـورت یک متغیر در رابطه رانکین ظاهر می شود.

$$v \cdot r^{0.6} / \text{sq root}\ (p) = \text{constant}$$

مجددا به مثال پیشین برگردیم. راهبرد حل مساله همان راهبرد قبلی است: ابتدا مقدار ثابت با استفاده از داده های موجـود (فاصـله، سـرعت باد، و اختلاف فشار) تعیین شده و سپس می توان سرعت باد در هر فاصله یا اختلاف فشاری را به دست آورد.

در این مثال نیز گردباد از فاصله ۶۰۰ مایل دورتر در حال نزدیک شدن است و سرعت کنـونی بـاد برابـر بـا ۲۰ مایـل بـر سـاعت است. اختلاف فشار میان مرکز و پیرامون گردباد در این نقطه حدود 60 mb است. هنگـام نزدیـک شـدن، ایـن گردبـاد بـه فاصـله ۱۰۰ مایلی رسیده و انتظار می رود که اختلاف فشار آن به 80 mb تقویت شود. بیشینه سرعت باد v چقدر خواهد بود؟

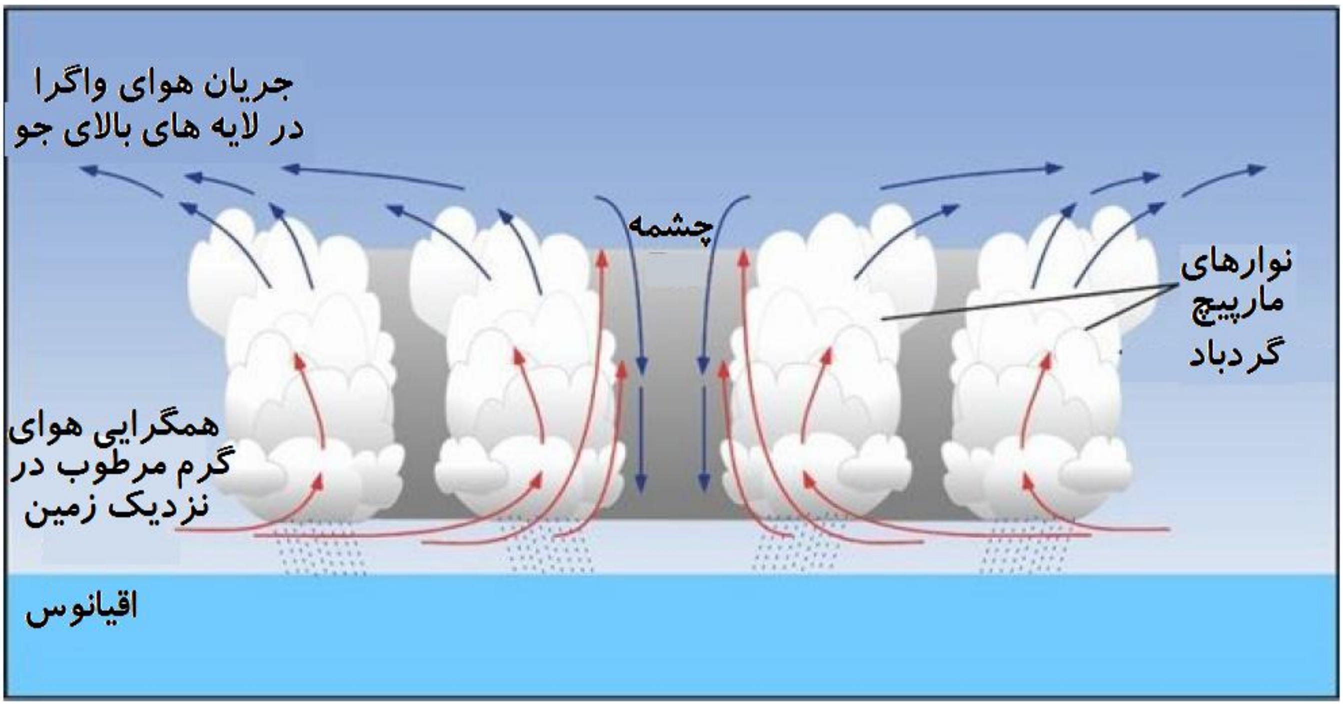
ابتدا به محاسبه مقدار ثابت می پردازیم:

$$20 \cdot (600)^{0.6} / \text{sq root}\ (60) \approx 120$$

اکنون می توان بیشینه سرعت باد را به دست آورد:

$$v \cdot (100)^{0.6} / \text{sq root}\ (80) \approx 120$$
$$v \approx 67\ mph$$

باید توجه داشت که تمامی روابط فوق تنها در محدوده بیرون از چشمه گردباد (که معمولا قطر آن حدود ۲۰ تا ۴۰ مایل است) برقـرار اسـت. بیشینه سرعت گردباد در جداره چشمه ایجاد می شود. درون چشمه گردباد، سرعت باد شدیدا کاهش می یابد. شاید از اینـرو اسـت کـه مـی گویند: «درون گردباد آرام باش».



نتیجه دیگری نیز می توان از این رابطه به دست آورد. اندازه چشمه گردباد کم و بیش ثابت است. این بدان معنی است که سـرعت بـاد درون یک گردباد با جذر اختلاف فشار افزایش می یابد. بنابراین اگر اختلاف فشار چهار برابر شود، بیشینه سرعت باد تقریبا دو برابر مـی شـود. داده های اندازه گیری شده مقادیر واقعی با دقت مناسبی این نتیجه را تایید می کند. برآوردی از سرعت بیشینه باد در یک گردباد را مـی تـوان از رابطه زیر به دست آورد:

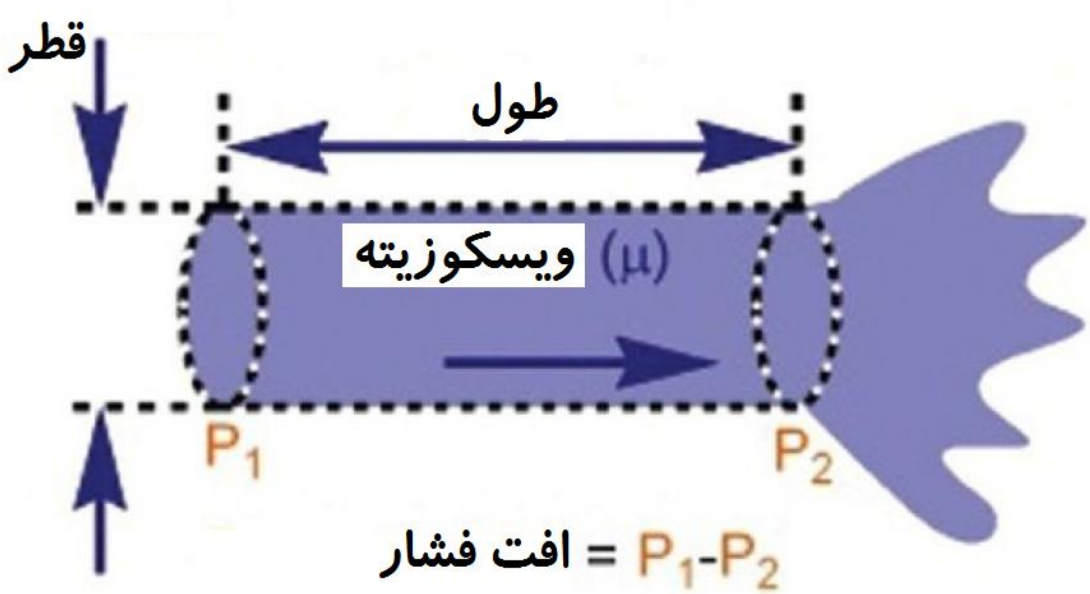
$$v(max) \approx 16 \cdot \text{sq root}(p)$$

نتیجه برحسب مایل بر ساعت است. برای یک گردباد متوسط در گروه چهارم، (p=80 mb) می توان بیشینه سرعت ۱۴۰ مایل بـر سـاعت را انتظار داشت.

جریان

نفت به خون حیاتی جهان تبدیل شده است. اگر جریان این مایع قطع شود، باید از بسیاری از تجملاتی که امروزه به آنهـا وابســته شـده ایـم دست برداریم. برای اطمینان از عدم قطع شدن این جریان، شبکه گسترده ای از خطوط لوله ساخته شـده تـا هـر روزه ایـن سـوخت فسـیلی گرانبها تا فواصل هزاران مایل دورتر منتقل شود. در این بخش نگاهی به جریان مایعات و گازها درون لوله ها خواهیم داشت.

فرمول مورد نظر در اینجا به نام قانون هاگن-پویسئول شناخته می شود. با این رابطه می توان نرخ جریان حجمی F (برحسب متر مکعـب بـر ثانیه) را در لوله ها محاسبه کرد. چه کمیتهایی برای این محاسبه مورد نیاز است؟ مشخصا ابعاد لوله یا همان شعاع r (برحسـب متـر) و طـول کل l (برحسب متر) مورد نیاز می باشد. در بخش پیشین اشاره شد که برای آنکه هوا (یا هر نوع گاز یا مایع دیگری) بتواند جریـان پیـدا کنـد باید اختلاف فشار p (که در اینجا برحسب واحد پاسکال یا نیوتون بر متر مربع بیان می شود) وجود داشته باشد. بنابراین این کمیت نیز حـایز اهمیت است. کمیت دیگری نیز باید برای مشخص کردن نوع سیال درون سیستم به کار رود. با یک ابعاد مشخص لوله و اختلاف فشار معـین، جریان هوا در لوله با جریان آب یا نفت مشخصا متفاوت خواهد بود. بنابراین برای محاسبه نرخ جریان، به کمیتی به نام ویسکوزیته دینامیـک (برحسب واحد پاسکال ثانیه) نیاز داریم.



فرمول مرتبط به صورت زیر است:

$$\mathbf{F = \pi \cdot r^4 \cdot p / (8 \cdot \mu \cdot l)}$$

یک خط لوله محلی با ابعاد r=1 m و l=25000 m برای انتقال نفت (با ویسکوزیته دینامیک 0.25 Pa.s) به یک شـهر بـه کـار مـی رود. برای این منظور پمپ اختلاف فشار p=5000 Pa را ایجاد می کند. دبی جریان حجمی حاصل چقدر خواهد بود؟

کافی است مقادیر را در فرمول وارد کنیم. در اینجا برای سادگی، واحدها نشان داده نشده است.

$$F = \pi \cdot 1^4 \cdot 5000 / (8 \cdot 0.25 \cdot 25{,}000)$$

$$F \approx 0.3\ m^3/s \approx 1130\ m^3/h$$

فرض کنید نرخ جریان به دست آمده برای برآوردن نیازهای شهر کافی نباشد. از ما خواسته شده که نرخ جریان به 2500 متر مکعب بر ساعت افزایش یابد. چه اختلاف فشاری برای این کار مورد نیاز است؟ ابتدا باید اطمینان حاصل کنیم که از واحدهای درستی استفاده می کنیم، واحد نرخ جریان باید برحسب متر مکعب بر ثانیه باشد.

$$2500\ m^3/h \approx 0.69\ m^3/s$$

اکنون باید مقادیر معلوم را در رابطه جایگذاری کنیم. بنابراین،

$$0.69 = \pi \cdot 1^4 \cdot p / (8 \cdot 0.25 \cdot 25{,}000)$$
$$p \approx 11{,}000\ Pa$$

ما مشخصا به یک پمپ بسیار قویتر برای برآورده کردن نیازهای شهر نیازمندیم. در مورد تبدیل واحد باید گفت برای تبدیل واحد متر مکعب بر ثانیه به متر مکعب بر ساعت باید آن را در عدد ۳۶۰۰ ضرب کرد.

اکنون به بررسی تغییرات پارامترهای این رابطه بر نرخ جریان حجمی می پردازیم.

- پارامتر شعاع لوله بسیار تاثیرگذار است. اگر شعاع را دو برابر کنیم، نرخ جریان حجمی شانزده برابر می شود. در مورد خط لوله مثال پیشین، اگر شعاع لوله ۲ متر باشد، دبی جریان برابر با ۴۰۰۰۰ متر مکعب بر ساعت خواهد بود.
- اگر طول خط لوله (یا ویسکوزیته سیال) دو برابر شود، نرخ جریان حجمی نصف خواهد شد. بنابراین چنانچه همه متغیرها ثابت مانده و طول خط لوله از ۲۵ کیلومتر به ۵۰ کیلومتر افزایش یابد، نرخ جریان حجمی از ۲۵۰۰ به ۱۲۵۰ متر مکعب بر ساعت کاهش می یابد.
- اگر اختلاف فشار دو برابر شود، نرخ جریان حجمی نیز دو برابر خواهد شد. بنابراین ارتباط خطی ساده ای میان این دو پارامتر وجود دارد که می توان نرخ جریان را با کاهش یا افزایش قدرت پمپ مستقیما تغییر داد.

امیدواریم این مبحث کوتاه شما را به ریاضیات مربوط به حرکت سیالات علاقمند کرده باشد. زمینه مذکور بسیار غنی و جذاب بوده که ارزش مطالعه بیشتر را دارد. توصیه می شود که به کتابهای مقدماتی مرتبط با این موضوع مراجعه کنید.

ترافیک

در بخش پیشین به جریان سیالات پرداختیم، اما جریان دیگری نیز وجود دارد و آن جریان تردد خودروها می باشد. ریاضی دانان ده ها مدل برای شبیه سازی تردد خودروها تهیه کرده اند تا کل سیستم ترافیک خودروها ایمن تر و موثرتر باشد. برخی از مدلها در این زمینه موفق بوده است اما باید به این نکته مهم اشاره کرد که رفتار پیش بینی نشده و غیر منطقی افراد که می تواند ناشی از خشم، نابهنجاری یا اضطراب باشد را نمی توان به عدد تبدیل کرد.

به هرحال بررسی برخی از مبانی ریاضی تردد خودروها خالی از لطف نیست. این بررسی منجر به استخراج فرمولهایی ساده شده و نتایج سودمندی ارایه می کند. برای این رسیدن به این فرمولها، به سه کمیت نیازمندیم: نرخ جریان F (برحسب تعداد خودرو بر ساعت)، سرعت جریان v (برحسب مایل بر ساعت mph) و چگالی ترافیک D (برحسب تعداد خودرو در هر مایل).

تنها با بررسی واحدها می توان به رابطه مهمی دست یافت. فرض کنید که چگالی ترافیک D را در سرعت جریان v ضرب کنیم. واحد کمیت حاصل چه خواهد بود؟ خوب اگر «تعداد خودرو در هر مایل» را در «مایل بر ساعت» ضرب کنیم، مشخصا واحد «تعداد خودرو بر ساعت» حاصل می شود، مایلهای صورت و مخرج با یکدیگر ساده می شوند. این همان واحد نرخ جریان ترافیک F است. بنابراین:

$$\mathbf{F = D \cdot v}$$

بنابراین اگر D=40 خودرو بر مایل بوده و سرعت متوسط برابر با v=50 مایل بر ساعت باشد، آنگاه نرخ جریان ترافیک برابر با F=2000 خودرو بر ساعت خواهد بود. دو فرمول دیگر نیز در این زمینه وجود دارد. ما تاکنون چگالی ترافیک و سرعت را دو کمیت مستقل در نظر گرفتیم. اما بر اساس تجربه دریافته اید که این موضوع لزوما صحیح نیست. می دانیم که همچنان که چگالی ترافیک بیشتر می شود، سرعت ترافیک کندتر خواهد شد. بنابراین باید رابطه ای میان این دو پارامتر وجود داشته باشد.

مشاهدات ترافیک نشان می دهد با تقریب خوبی، سرعت متوسط به صورت خطی با چگالی ترافیک کاهش می یابد. اگر سرعت جریان آزاد را با u نشان دهیم و بیشینه چگالی ترافیک را با M، آنگاه فرمول زیر برآورد خوبی میان سرعت ترافیک v و چگالی ترافیک D ارایه می کند:

$$\mathbf{v = u \cdot (1 - D / M)}$$

اما این دو پارامتر جدید چیستند؟ سرعت جریان آزاد در واقع همان سرعتی است که راننده هنگامی که جاده کاملا خالی است برمی گزیند. معمولا این سرعت نزدیک حداکثر سرعت مجاز می باشد. برای بیشینه چگالی ترافیک، معمولا مقدار ۳۰۰ خودرو در هر مایل برای هر خط می باشد که مربوط به ترافیک سپر به سپر است.

پیش از پرداختن به نتایج جالب این رابطه، مثال ساده ای را مورد بررسی قرار می دهیم.

مشاهدات نشان داده که برای یک جاده یک خطه سرعت جریان آزاد برابر با u=50 مایل بر ساعت بوده و چگالی بیشینه برابر با M=300 عدد خودرو در هر مایل می باشد. برآورد می شود که سرعت متوسط کنونی حدود v=20 مایل بر ساعت باشد. چگالی ترافیک و نرخ جریان ترافیک در حال حاضر چقدر است؟

ابتدا از فرمول دوم برای تعیین چگالی ترافیک D از داده های موجود استفاده می کنیم:

$$20 = 50 \cdot (1 - D / 300)$$
$$D = 180 \text{ cars/mile}$$

اکنون با استفاده از فرمول نخست، می توان به راحتی نرخ جریان ترافیک F را محاسبه کرد.

$$F = 20 \text{ mph} \cdot 180 \text{ cars/mile} = 3600 \text{ cars/hour}$$

اگر رابطه میان چگالی و سرعت را در رابطه نرخ جریان ترافیک جایگذاری کنیم، خواهیم دید که نرخ جریان ترافیک با چگالی ترافیک ارتباطی سهمی شکل دارد. در چگالی های اندک، هنگامی که جاده تقریبا خالی است، نرخ جریان ترافیک با افزایش چگالی، افزایش می یابد. اگرچه، در چگالی خاصی نرخ جریان به مقدار بیشینه رسیده و پس از آن شروع به کاهش می کند. نتیجه جالبی به دست می آید: برای هر جاده نرخ جریان بیشینه ای وجود دارد که آن را ظرفیت می نامیم.

مشتق گیری از این رابطه برای به دست آوردن فرمول ظرفیت نیازمند انجام یکسری محاسبات ریاضی است که از آن صرف نظر نموده و مستقیما به سراغ فرمول نهایی می رویم. این فرمول تنها حاوی دو پارامتری است که شناخته ایم: سرعت جریان آزاد u (برحسب مایل بر ساعت) و بیشینه چگالی ترافیک M (برحسب تعداد خودرو بر مایل).

$$\mathbf{C = 0.25 \cdot u \cdot M}$$

همچنین محاسبات نشان می دهد که این بیشینه نرخ جریان همواره در نیمی از چگالی بیشینه رخ می دهد.

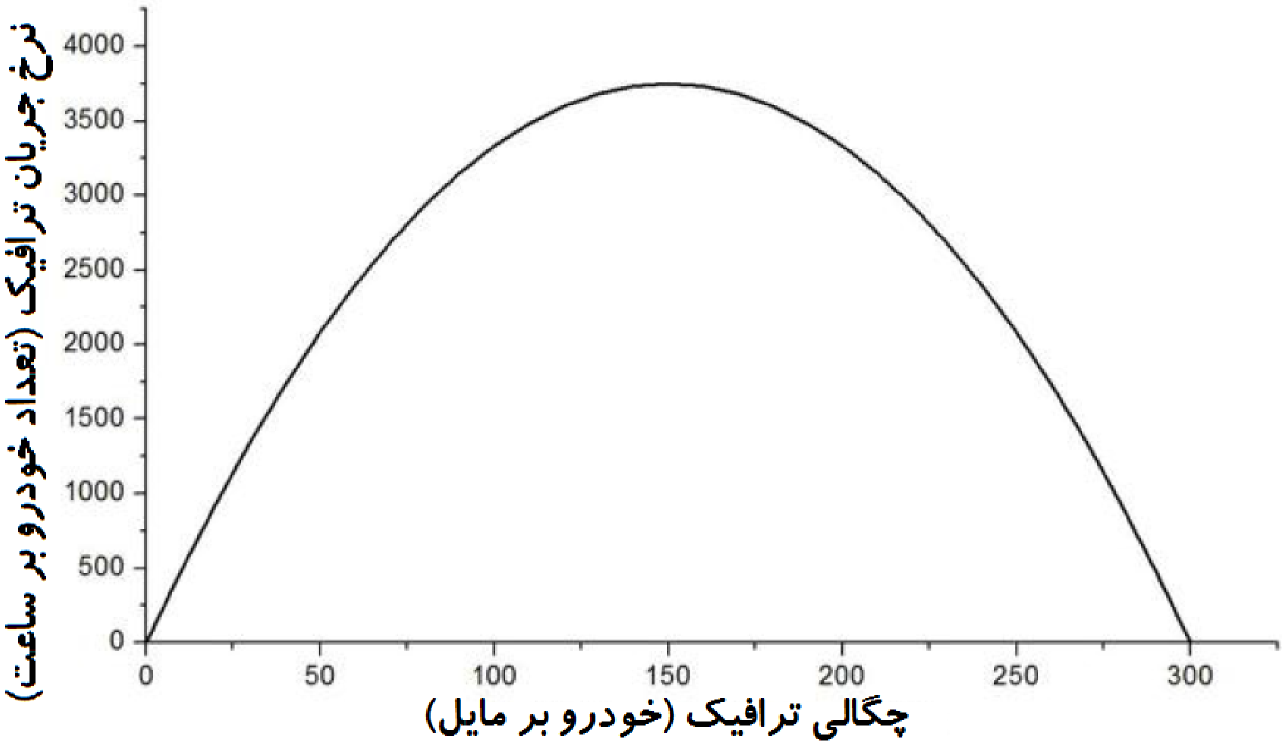
مجددا به همان جاده یک خطه مثال پیشین با مقادیر u=50 مایل بر ساعت و M=300 خودرو بر مایل برمی گردیم. حساب کردیم که در حال حاضر نرخ جریان ترافیک ۳۶۰۰ خودرو بر ساعت است. این مقدار تا چقدر می تواند افزایش یابد؟

$$C = 0.25 \cdot 50 \text{ mph} \cdot 300 \text{ خودرو در هر مایل}$$

$$\approx 3750 \text{ خودرو در هر ساعت}$$

این نرخ جریان هنگامی ایجاد می شود که چگالی خودرو از مقدار کنونی D=180 خودرو بر مایل به D=300/2=150 خودرو بر مایل کاهش یابد. هرگونه افزایش چگالی خودرو از این مقدار موجب کاهش نرخ جریان ترافیک خواهد شد.

در تصویر زیر رابطه تئوری میان چگالی و نرخ جریان را برای یک نمونه جاده تک خطه مشاهده می کنید.

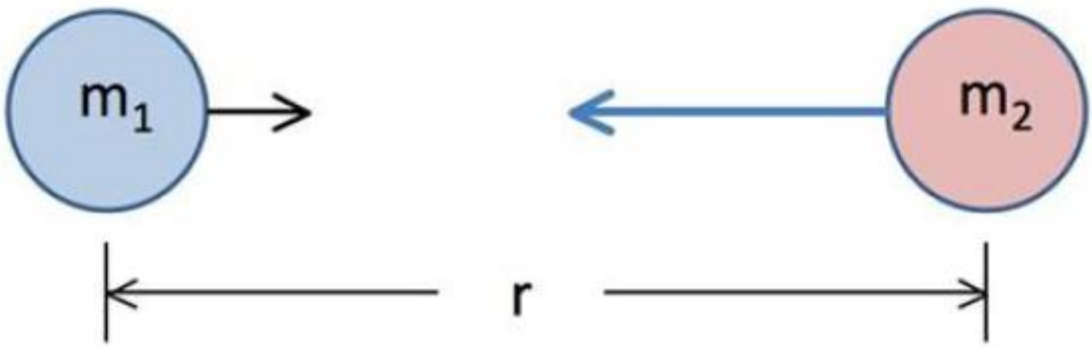


اما به خاطر داشته باشد که ما با تعداد زیادی از افراد سروکار داریم که هنگـام راننـدگی احساسـات متفـاوتی دارنـد. تمـامی فرمولهـای فـوق تقریبهای مناسبی از این مساله بوده و دقتی در حدود مثبت و منفی ده درصد دارند.

گرانش

هر جسمی که در مجاورت سایر اجسام باشد به سمت آنها جذب می شود. این موضوع یکی از بنیادی ترین قوانین فیزیک محسوب می شـود. این نیروی کشش شما را بر روی زمین نگه می دارد، زمین را به خورشید نگه می دارد، خورشید را به کهکشـان راه شـیری نگـه مـی دارد، و کهکشان راه شیری را به خوشه های کهکشانی موضعی متصل می کند. نام این نیرو گرانش است.

فرمولی که توصیف کننده این نیروی اساسی است توسط نیوتون در کتاب خود به نام اصول درج شد که در سال ۱۶۸۶ منتشر شد. این رابطه بر سه کمیت استوار است: جرم یک جسم m (برحسب کیلوگرم)، جرم جسم دیگر M (برحسب کیلوگرم) و فاصله میان آنها d (برحسب متر) که از مراکز آنها اندازه گیری می شود. علاوه بر آن، این فرمول حاوی مقـدار ثـابتی اسـت کـه بـه آن ثابـت گـرانش G=6.67*10^(-11) N(m/kg)^2 گفته می شود.



رابطه نیروی گرانش F (برحسب نیوتون) به صورت زیر است:

$$F = G \cdot m \cdot M / r^2$$

مثال زیر درباره چگونگی کاربرد این فرمول است:

جرم یک انسان بالغ متوسط برابر حدود m=75 kg است. در هر لحظه، فرد کشش گرانشی زمین را احساس می کند که جرم زمین برابر با M=5.97*10^24 kg است. فاصله فرد تا مرکز زمین برابر حدود 6370000 m است. نیروی گرانشی وارد بر این فرد چقدر است؟

$$F = G \cdot 80\ kg \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\ kg / (6{,}370{,}000\ m)^2$$
$$F \approx 785\ N$$

اکنون به بررسی تاثیر تغییرات ورودیهای این فرمول بر نیروی گرانشی پرداخته و پس از آن به یک رابطه ساده تر خواهیم رسید.

- اگر جرم یکی از اجسام را دو برابر کنیم، نیروی گرانش نیز دو برابر می شود. بنابراین یک فرد ۱۶۰ کیلوگرمی نیرویی تقریبا برابر با 785*2=1570 N را تجربه می کند. همین مقدار نیرو به فردی که ۸۰ کیلوگرم جرم دارد ولی بر روی سیاره ای با جرم دو برابر زمین ایستاده است اعمال می شود.
- اگر فاصله میان اجسام دو برابر شود، نیروی گرانش با ضریب چهار برابر کاهش می یابد. بنابراین اگر فرد بالغ متوسط در یک ایستگاه فضایی که در فاصله 6370*2=12740 کیلومتری از سطح زمین است، باشد، نیروی گرانش به مقدار 195 نیوتون کاهش می یابد.

هنگامی که نیروهای گرانشی را بر روی سطح زمین محاسبه می کنیم، نیازی نیست هر بار با اعداد بسیار کوچک (ثابت گرانش) یا بسیار بزرگ (جرم زمین) سروکار داشته باشیم. همانگونه که می توان از رابطه بالا استخراج کرد، نیروی اعمالی به یک جرم یک کیلوگرمی بر روی سطح زمین برابر است با:

$$g \approx 9.81\ N$$

همانگونه که در فیزیک نیز مرسوم است، این مقدار خاص را با g نشان می دهیم. دانشمندان این مقدار را شتاب گرانش می نامند. با این عدد، می توان قانون گرانش را به صورت زیر نوشت:

$$F = m \cdot g$$

که در آن m جرم جسم بر روی سطح زمین است. چرا g شتاب گرانشی نامیده می شود؟ قانون دوم نیوتون را به خاطر آورید که می گوید نیروی اینرسی حاصلضرب جرم در شتاب است:

$$F = m \cdot a$$

هنگامی که جسمی را می اندازید، حرکت آن در اثر نیروی کششی گرانش ایجاد می شود. بنابراین، در فرمول فوق به جای F رابطه نیروی گرانش را جایگذاری می کنیم تا شتاب حاصله به دست آید:

$$m \cdot g = m \cdot a$$
$$g = a$$

بنابراین g نه تنها نیرویی است که یک جسم یک کیلوگرمی بر روی سطح زمین احساس می کند، بلکه شتابی است که به هر جسم در حال سقوط اعمال می شود. بنابراین مقدار مهمی برای به خاطر سپردن است.

ممکن است شما بگویید این موضوع صحیح نیست. هنگامی که یک پَر را رها می کنید به اندازه سقوط یک سنگ شتاب نمی گیرد. واقعیت آن است که این موضوع صحیح است، اما در خلاء. در ابتدا پَر دقیقا همان شتاب سنگ، ۹٫۸۱ متر بر مجذور ثانیه را می بیند. تنها به دلیل وجود هوا است که سقوط آنها متفاوت است. اگر پَر و سنگ را در لوله خلاء رها کنیم، هر دو در یک زمان به ته لوله می رسند. سعی کنید این آزمایش را انجام دهید تا ببینید واقعا سنگ و پَر همانند یکدیگر سقوط می کنند.

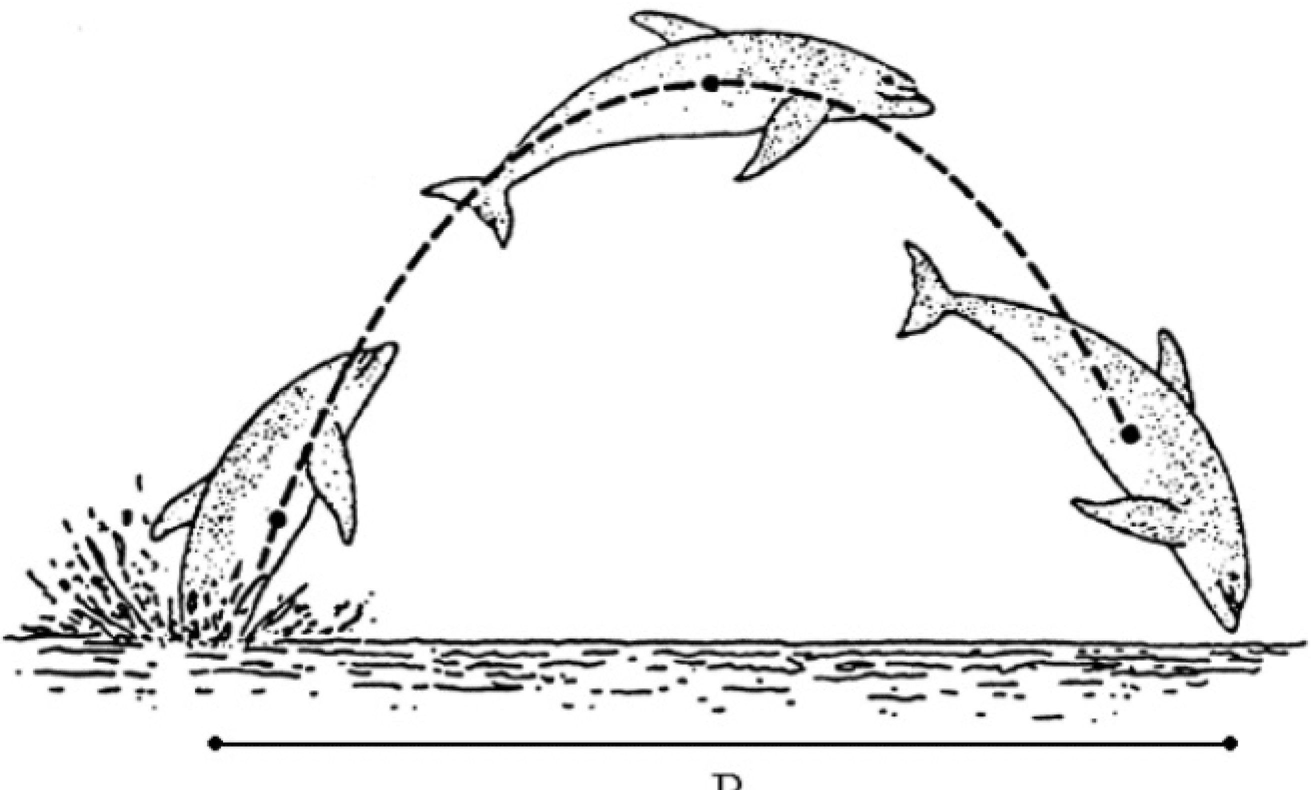
نیروی گرانش در مقیاس بزرگ، نقش تعیین کننده ای در شکل گیری جهان داشته است و در مقیاس انسان نیز تاثیرگذار است. ولی هنگامی که اشیاء کوچکتر می شوند و به ویژه در مولکولها، اتمها و ذرات زیراتمی، نیروی گرانش ناچیز خواهد بود. در این سطح از مقیاس، نیروهای الکترومغناطیس و نیروهای هسته ای قوی و ضعیف قابل توجه می باشند. به عبارت دیگر این ذرات تقریبا نیروی گرانش را حس نمی کنند.

بُرد

هنگامی که جسمی را پرتاب می کنید، نیروی گرانش سبب می شود که در مسیری سهمی شکل حرکت کند. سوالی که مطرح می شود آن است که اگر این جسم با سرعت v (برحسب متر بر ثانیه و تحت زاویه مشخص (برحسب درجه) پرتاب شود، تا چه فاصله ای پرتاب خواهد شد؟ برای پاسخ دادن به این پرسش شما باید مسیر حرکت را به صورت رابطه ریاضی نوشته و نقطه تقاطع این منحنی را با زمین بیابید. با انجام این کار به یک فرمول سودمند برای بُرد R (برحسب متر) دست می یابید:

$$\mathbf{R = v^2 \cdot sin\ (2 \cdot \theta) / g}$$

که در آن g شتاب گرانش است. به یک مثال ساده می پردازیم.



یک دلفین همانگونه که در شکل نشان داده شده، با سرعت v=5.5 m/s و زاویه 70 درجه از آب بیرون می پرد. پیش از آنکه مجددا به آب برگردد، چه فاصله ای را به جلو پریده است؟ به خاطر داشته باشید که شتاب گرانش برابر با g=9.81 m/s^2 است.

$$R = (5.5\ m/s)^2 \cdot sin(140°)\ /\ 9.81\ m/s^2 \approx 2\ m$$

اگر دولفین بخواهد فاصله بیشتری را بپرد، بهترین گزینه او آن است که با زاویه ۴۵ درجه بپرد. در این صورت برد او برابر خواهد بود با:

$$R = (5.5\ m/s)^2 \cdot \sin(90°) / 9.81\ m/s^2 \approx 3.1\ m$$

که این مقدار بیشترین فاصله ای است که می تواند با یک سرعت اولیه مشخص به آن دست یابد.

اکنون به بررسی تاثیر تغییرات پارامترها بر مسیر پروازی و برد می پردازیم:

- اگر سرعت دو برابر شود، برد چهار برابر خواهد شد. بنابراین با پرش در سرعت ۱۱ متر بر ثانیه، دولفین به فاصله ۸ متر خواهد پرید.
- همانگونه که اشاره شد زاویه ۴۵ همواره بیشترین برد را در یک سرعت مشخص ایجاد خواهد کرد. در مورد مثال دولفین، با انتخاب زاویه بهینه، برد بیش از ۵۰ درصد افزایش می یابد.
- اگر شتاب گرانش دو برابر شود، برد نصف خواهد شد. مطابق با این رابطه معکوس، بر روی ماه که شتاب گرانش تنها یک ششم مقدار روی زمین است، دولفین می تواند به فاصله ۱۲ متر بپرد.

کمیت دیگری که ممکن است در این مساله مورد توجه باشد، ارتفاع بیشینه H (برحسب متر) است. می توان این مقدار را از رابطه زیر به دست آورد:

$$H = 0.5 \cdot (\ v \cdot \sin(\theta)\ )^2 / g$$

برای مثال دولفین، بیشینه ارتفاع برای زاویه ۷۰ درجه برابر ۱,۴ متر و برای زاویه ۴۵ درجه برابر با ۰,۸ متر خواهد بود. همانگونه که مشاهده می کنید، برد بیشتر همواره به معنی ارتفاع بیشتر نیست.

سرعت برخورد

فرمول بعدی نیز درباره گرانش است. در بسیاری از کاربردها دانستن سرعتی که اجسام هنگام سقوط بر روی زمین پیدا می کنند لازم است. برای محاسبه آن، به دو کمیت نیاز داریم: ارتفاع رهایش h (برحسب متر) و شتاب گرانش g (برحسب متر بر مجذور ثانیه). با استفاده از قانون بقای انرژی، می توان سرعت برخورد v (برحسب متر بر ثانیه) را به دست آورد:

$$\mathbf{v = sq\ root\ (2 \cdot g \cdot h)}$$

فرمول ساده ای است. اما باید توجه داشته باشید که در آن از مقاومت هوا چشم پوشی شده است، یعنی اگر اتمسفر وجود داشته باشد، مقدار محاسبه شده تنها یک تقریب خواهد بود. این فرمول برای سقوط اجسام سنگین در ارتفاعهای پایین دقت خوبی دارد. در بخش «بقای انرژی» چگونگی به دست آوردن این فرمول را خواهید دید.

یک جرثقیل تصادفا تیرآهنی را از ارتفاع ۲۰ متری رها می کند. با چه سرعتی این تیرآهن به زمین برخورد خواهد کرد؟

$$v = sq\ root\ (2 \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 20\ m)$$

$$v \approx 20\ m/s = 72\ km/h \approx 45\ mph$$

در مورد این مثال، دقت محاسبه خوب خواهد بود زیرا تیرآهن سنگین بوده و در چنین ارتفاع کوتاهی نمی تواند چندان تحت تاثیر مقاومت هوا قرار گیرد.

اکنون به بررسی تغییرات پارامترهای ورودی بر سرعت برخورد می پردازیم:

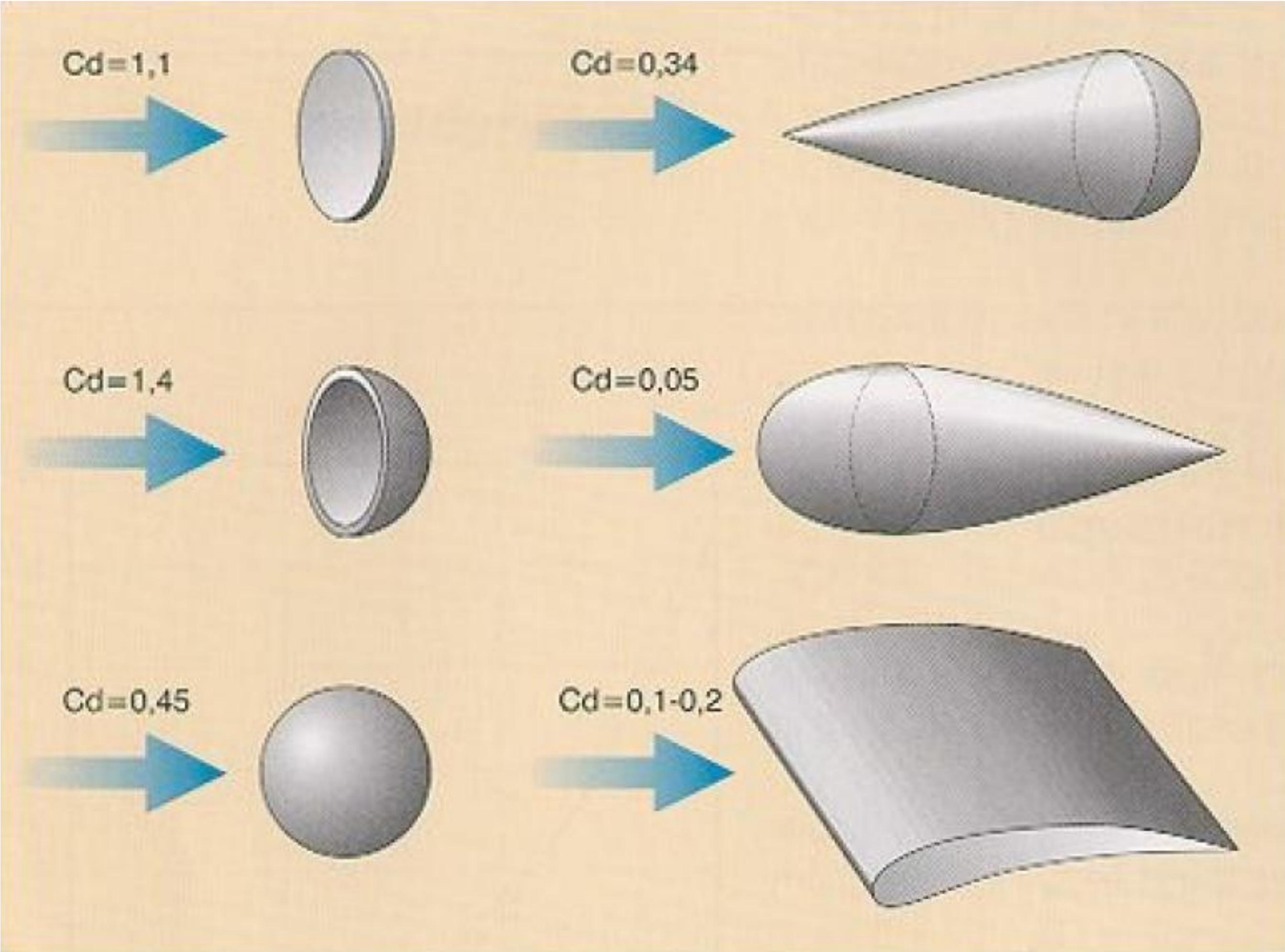
- اگر ارتفاع سقوط (یا شتاب گرانش) چهار برابر شود، سرعت برخورد دو برابر خواهد شد. بنابراین رها کردن تیرآهن از ارتفاع ۸۰ متری سبب می شود که با سرعت ۹۰ مایل بر ساعت به زمین اصابت کند.

هنگامی که ارتفاع رهایش بسیار بالا باشد و مقاومت هوا عامل تاثیر گذاری شود، این فرمول دیگر کاربرد چندانی نخواهد داشت. خوشبختانه فرمول دیگری برای این حالت وجود دارد. پس از رهایش، هر جسمی به سرعتی حدی رسیده و سرعت آن از این مقدار فراتر نخواهد رفت. برای محاسبه این سرعت، پارامترهای ورودی دیگری نیز مورد نیاز می باشد.

کمیتهای مورد نیاز عبارتند از: جرم جسم (برحسب کیلوگرم)، شتاب گرانش (برحسب متر بر مجذور ثانیه)، چگالی هوا D (برحسب کیلوگرم بر متر مکعب)، مساحت سطح تصویر شده جسم A (برحسب متر مربع)، و ضریب پسا c (بدون بعد). دو کمیت آخر، تا حدی نیاز به توضیح دارد.

سطح تصویر شده، عبارت است بزرگترین سطح مقطع در راستای سقوط جسم. می توانید آن را به عنوان سایه جسم بر روی زمین، هنگامی که پرتوهای خورشید به صورت عمودی به زمین می تابند، در نظر بگیرید. برای مثال، اگر جسم رها شونده کره باشد، سطح تصویر شده دایره ای با همان شعاع خواهد بود.

ضریب پسا یک عدد بی بعد است به صورت بسیار پیچیده ای وابسته به هندسه جسم است. راه ساده ای برای محاسبه آن وجود ندارد و معمولا آزمایشگاه تونل باد به دست می آید. البته می توانید ضرایب پسای شکلهای متداول را از جداول به دست آورید.



اکنون که همه پارامترهای ورودی را شناخته ایم، نگاهی به فرمول سرعت نهایی v (برحسب متر بر ثانیه) می اندازیم. این فرمول برای اشیائی که از ارتفاعهای زیاد رها می شوند صادق است، چرا که این اشیاء بتوانند فرصت لازم برای رسیدن به سرعت حدی را پیدا کنند. رسیدن به سرعت ثابت حدی در نتیجه تعادل میان نیروی گرانش و مقاومت هوا رخ می دهد.

$$v = \text{sq root}\,(2 \cdot m \cdot g / (c \cdot D \cdot A))$$

به یک مثال توجه کنید.

بَدَلکارهای هوایی پس از رها شدن از هواپیما، حرکت سقوط آزاد انجام می دهند و در زمان اندکی به سرعت حدی می رسند. جرم بَدَلکار برابر با m=75 kg و g=9.81 m/s^2 و D=1.2 kg/m^3 است. در وضعیت سر رو به پایین، ضریب پسای بَدَلکار برابر با c=0.8 و مساحت سطح تصویر شده آن A=0.3 m^2 است. سرعت نهایی بَدَلکار چقدر است؟

$$v = sq\ root\ (2 \cdot 75 \cdot 9.81 / (0.8 \cdot 1.2 \cdot 0.3)\ )$$
$$v \approx 70\ m/s \approx 260\ km/h \approx 160\ mph$$

مطابق با برخی گزارشها، آسیبهایی ناشی از افتادن سکه ها از ساختمانهای بلند از قبیل امپایر استیت ایجاد شده است. آیا این امکان پذیر است. سکه ای که از این ارتفاع رها می شود با چه سرعتی به زمین (یا بر افرادی که در حال پیاده روی هستند) برخورد می کند؟

ابتدا باید ورودیهای مورد نیاز را جمع آوری کنیم. اگر سکه به صورت افقی بیافتاد، ضریب پسای c=1.1 دارد (به شکل نگاه کنید). سکه ده سنتی به جرم m=0.002 kg و شعاعی برابر حدود 8 mm = 0.008 m مساحتی برابر با A=0.0002 مترمربع دارد. چگالی هوا برابر با D=1.25 کیلوگرم بر مترمکعب است. اکنون برای محاسبه سرعت حدی سکه از فرمول استفاده می کنیم:

$$v = sq\ root\ (2 \cdot 0.002 \cdot 9.81 / (1.1 \cdot 1.25 \cdot 0.0002)\ )$$
$$v \approx 12\ m/s \approx 43\ km/h \approx 27\ mph$$

سرعت به دست آمده بسیار کمتر از گلوله های پلاستیکی است که در فواصل نزدیک می توانند با سرعت ۱۰۰ متر بر ثانیه برخورد کند. بنابراین در این سرعت چنانچه سکه مستقیما بر روی چشمان فرد بخورد می تواند آسیب بزند. در غیر این صورت تنها می تواند درد کمی ایجاد کند.

در اینجا به بررسی نحوه تغییرات سرعت حدی با تغییرات ورودیها می پردازیم.

- اگر جرم (یا شتاب گرانش) چهار برابر شود، سرعت حدی دو برابر می شود. بنابراین یک بَدَلکار بسیار سنگین و یا یک بَدَلکار معمولی بر روی یک سیاره سنگینتر، بسیار سریعتر سقوط می کند.
- اگر ضریب پسا (یا چگالی هوا و یا مساحت سطح تصویر شده) را دو برابر کنید، سرعت حدی نصف می شود. این موضوع روش کار چترهای نجات را توضیح می دهد. این چترها، ضریب پسا و مساحت سطح تصویر شده بسیار زیادی دارند، لذا به طور موثری سرعت حدی را کاهش می دهند.

در بخش بعدی به طور موقت از گرانش و مسایل آن فاصله می گیریم، ولی در بخشهای آتی مجددا به آن خواهیم پرداخت.

فاصله ترمزگیری

اگر اتفاق غیرمنتظره ای هنگام رانندگی رخ دهد، ترمز گرفتن نخستین واکنش شما خواهد بود. اینکه چقدر طول می کشد تا کاملا متوقف شوید به چند عامل بستگی دارد. در اینجا کمیتهای مورد نیاز برای محاسبه فاصله ترمزگیری مورد بررسی قرار گرفته اند.

مشخصا یک عامل مهم، سرعت فعلی خودرو v (برحسب متر بر ثانیه) است. علاوه بر آن، زمان واکنش t (برحسب ثانیه) و شتاب توقف (برحسب متر بر مجذور ثانیه) مورد نیاز می باشد. شتاب توقف عمدتا بستگی به شدت فشردن پدال ترمز و شرایط سطح جاده دارد. اگر از بداقبالی نیاز داشتید که خودرو را بر روی برف یا یخ متوقف کنید، قطعا متوجه تاثیر این عامل شده اید. رابطه فاصله ترمزگیری d (برحسب متر) عبارت است از:

$$d = v \cdot t + v^2 / (2 \cdot a)$$

پیش از پرداختن به مثال، نگاهی به مقادیر متداول پارامترهای ورودی این رابطه بیاندازیم. برای یک راننده هوشیار و آگاه، زمان واکنش برابر با t=1 s است. هنگامی که راننده مست بوده یا در حال نوشتن پیامک است، این زمان می تواند تا t=2 s افزایش یابد. برای شتاب توقف نیز مقادیر متداول عبارتند از a= 8 m/s^2 بر روی آسفالت خشک، a=6 m/s^2 بر روی آسفالت خیس، a=2.5 m/s^2 بر روی برف، a=1 m/s^2 بر روی یخ (همگی با فرض ترمزگیری کامل).

یک راننده هوشیار (t=1 s) در سرعت v=75 مایل بر ساعت (تقریبا ۳۴ متر بر ثانیه) بر روی آسفالت خشک (a=8 m/s^2) ترمز می گیرد. مسافت ترمزگیری او چقدر است؟

$$d = 34 \cdot 1 + 34^2 / 16 \approx 105 \text{ m} \approx 350 \text{ ft}$$

مقایسه آن با یک راننده مست (t=2 s) تحت همان شرایط چگونه است؟ مجددا از رابطه استفاده می کنیم:

$$d = 34 \cdot 2 + 34^2 / 16 \approx 140 \text{ m} \approx 460 \text{ ft}$$

بنابراین مسافت ترمزگیری راننده مست ۳۵ متر (یا حدود طول ۸ خودرو) بیشتر است. این افزایش چشمگیر مسافت ترمزگیری در واقع می تواند فاصله میان مرگ و زندگی باشد.

مجددا به مثال راننده هوشیار برگردیم و ببینیم که فاصله ترمزگیری ۱۰۵ متر زمانی که جاده یخی باشد چقدر خواهد شد:

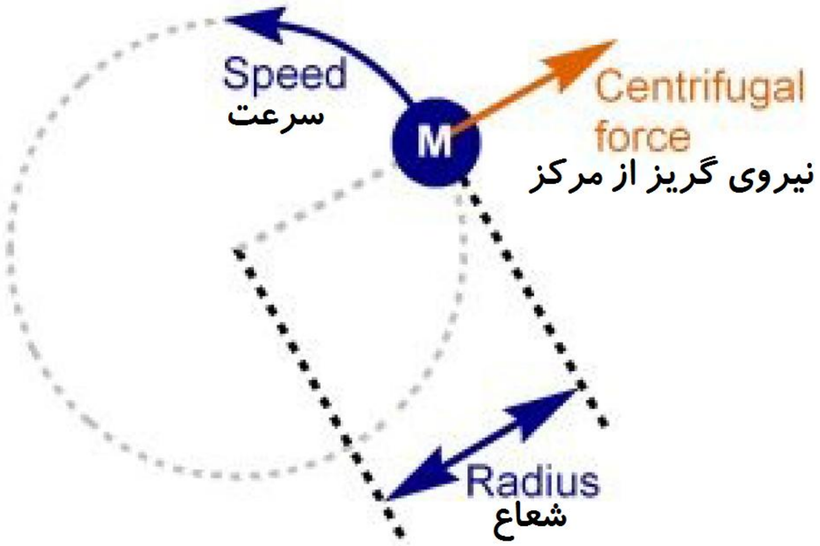
$$d = 34 \cdot 1 + 34^2 / 2 \approx 610 \text{ m} \approx 2000 \text{ ft}$$

شگفت آور است؟ آخرین زمستان را به یاد آورید. به همین دلیل است که رانندگان عاقل و هوشیار زمانی که جاده پوشیده از یخ است هیچگاه با سرعتی بیش از ۳۰ مایل بر ساعت (۴۸ کیلومتر بر ساعت) حرکت نخواهند کرد. حتی در سرعت ۳۰ مایل بر ساعت، فاصله ترمزگیری هنوز هم حدود ۱۰۵ متر می باشد.

برای بررسی وابستگی فرمول به تغییرات پارامترها، نکته حایز اهمیت آن است که فاصله ترمزگیری با مجذور سرعت ارتباط دارد. این بدان معنی است که اگر سرعتتان دو برابر شود، فاصله ترمزگیری (تقریبا) چهار برابر خواهد شد.

نیروی گریز از مرکز

هنگامی که با خودروی خود در یک مسیر منحنی شکل عبور می کنید، متوجه می شوید که نیرویی شما را به سمت بیرون می کشد. این پدیده در اثر اینرسی شما رخ می دهد. بدنتان می خواهد در مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه دهد، اما خودرو موافق نیست و شما را مجبور به دور زدن می کند. چیزی که شما تجربه می کنید نیروی گریز از مرکز است.



نیروی گریز از مرکز هرجا که جسمی بخواهد جهت حرکت خود را تغییر دهد به آن وارد مـی شـود. ایـن نیـرو در حرکـت در راسـتای خـط مستقیم وجود ندارد. هنگامی که این نیرو اعمال می شود، همواره عمود بر راستای مسیر و به سمت بیرون از مرکز منحنی است. بنابراین ایـن نیرو تلاش می کند شما را از منحنی بیرون بیاندازد.

اکنون به فرمول آن بپردازیم. این نیرو هرگاه که حرکت دایره ای داشته باشیم اعمال خواهد شد (منحنیها، در واقـع بخشـهایی از دوایـر مـی باشند، لذا درباره منحنیها نیز صادق است). به عنوان ورودیهای فرمول، جرم جسم متحرک m (برحسـب کیلـوگرم)، سـرعت آن v (برحسـب متر بر ثانیه)، و شعاع منحنی r (برحسب m) مورد نیاز می باشند. با مشخص بودن این کمیتها به راحتی می توان مقدار نیروی گریز از مرکـز را محاسبه کرد.

$$\mathbf{F = m \cdot v^2 / r}$$

اکنون به یک مثال بپردازیم.

فرض کنید یک فرد بالغ متوسط با جرم m=75 kg با سرعت v=35 m/s در یک منحنی با شعاع r=400 m رانندگی می کند. ایـن فرد نیروی گریز از مرکزی برابر با این مقدار را تجربه خواهد کرد:

$$F = 75\ kg \cdot (35\ m/s)^2 / 400\ m \approx 230\ N$$

آیا این مقدار نیرو قابل توجه است؟ بهتر است آن را با نیروی گرانش مقایسه کنیم. این فـرد نیـروی گرانشـی برابـر بـا 785 N را تجربه می کند، نیروی گریز از مرکز در این حالت اندکی از یک سوم نیروی گرانش کمتر است. بنابراین این نیرو بسیار چشـمگیر است!

اکنون تحلیلی درباره چگونگی تاثیر تغییرات ورودیها بر شدت نیروی گریز از مرکز انجام می دهیم:

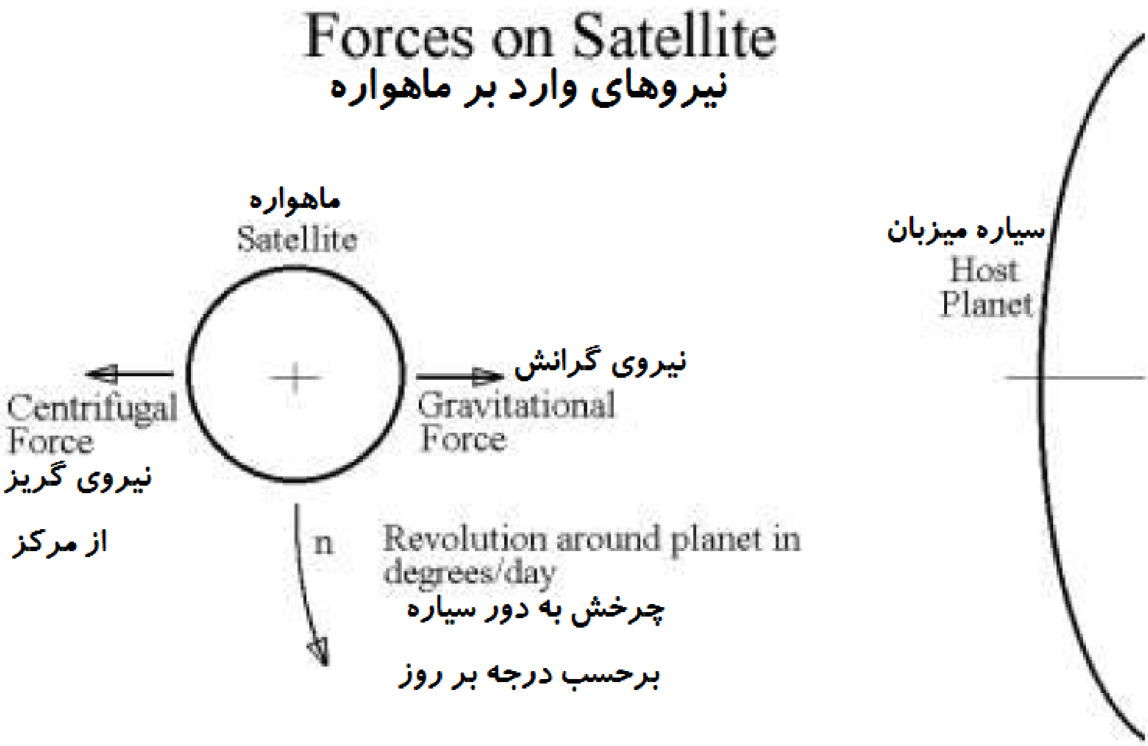
- اگر جرم جسم متحرک دو برابر شود، نیروی گریز از مرکز نیز دو برابر خواهد شد. بنابراین یک فرد 160 کیلوگرمی نیرویی برابـر بـا 230*2=460 N را تجربه خواهد کرد.
- اگر سرعت جسم دو برابر شود، نیروی گریز از مرکز چهار برابر خواهد شد. به دلیل این تغییرات شدید، حتی اندکی افزایش سـرعت می تواند شما و خودرویتان را از منحنی به بیرون پرتاب کند. بنابراین سرعت خود را با دقت و احتیـاط انتخـاب کنیـد. فـرد مثـال پیشین چنانچه با سرعت 35 m/s*2=70 m/s در منحنی رانندگی کند، با نیرویی برابر با 4*230 N=920 N به سمت بیـرون کشیده می شود، که از نیروی گرانش نیز بیشتر است.
- اگر شعاع منحنی دو برابر شود، یعنی منحنی همـوارتر شـود، نیـروی گریـز از مرکـز نصـف خواهـد شـد. افـزایش شـعاع بـه 400 m*2=800 m موجب کاهش نیروی احساس شده به 230 N*0.5=115 N می شود.

ترکیب نیروی گریز از مرکز با قانون گرانش می تواند نتایج بسیار جالبی را ارایه کند که در بخش بعد به آن پرداخته خواهد شد.

سرعت ماهواره

برای درک این بخش، ابتدا باید بخشهای گرانش و نیروی گریز از مرکز را مطالعه کنید، زیرا این بخش تلفیقی از دو موضوع مذکور است. چرا ماهواره ها بر روی زمین نمی افتند؟ نیروی گرانش همواره آنها را به سمت سطح زمین می کشد. اما همچنان ماهواره ها در مدار خود باقی مانده و به دور سیاره در حال گردش هستند.

این واقعیت که ماهواره ها با وجود نیروی گرانش که تلاش می کند آنها را به زمین بزند، همچنان به گردش مداری خود ادامه می دهند، نشان می دهد که باید نیروی دومی وجود داشته باشد که اثر گرانش را خنثی کند. با این مقدمه، همانگونه که ممکن است حدس زده باشید، این نیرو همان گریز از مرکز است. این نیرو به سمت بیرون از مرکز حرکت دایره ای عمل می کند، بنابراین جهت آن دقیقا مخالف جهت نیروی گرانش است.



برای اینکه این دو نیرو یکدیگر را خنثی کنند نه تنها باید راستاهای آنها مخالف هم باشد، بلکه مقادیر یکسانی نیز باید داشته باشند. بنابراین رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$G \cdot m \cdot M / r^2 = m \cdot v^2 / r$$

سمت چپ این رابطه برای نیروی گرانش و سمت راست آن مربوط به به نیروی گریز از مرکز است. در این رابطه، m جرم ماهواره، M جرم زمین، r فاصله میان ماهواره و زمین (با به طور مشخص: بین ماهواره تا مرکز زمین)، و v سرعت گردش مداری ماهواره است.

نکته مهم درباره این فرمول آن است که می توانیم رابطه ای مناسب بین سرعت ماهواره v و فاصله آن تا مرکز زمین r بیابیم:

$$\mathbf{v = sq\ root\ (G \cdot M / r)}$$

توجه داشته اید که در مرحله به دست آوردن v، جرم ماهواره از روابط حذف شد. این بدان معنی است که جرم ماهواره تاثیری بر سرعت گردش مداری آن ندارد.

ماهواره ای در فاصله $r=30000000\ m$ (سی میلیون متر) از مرکز زمین در حال گردش است. سرعت آن چقدر است؟ برای این مثال ما باید جرم زمین را نیز بدانیم، که می توانید آن را از بخش «گرانش» بیابید. با وارد کردن مقادیر خواهیم داشت:

$$v = \text{square root}\ (G \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\ kg / 30{,}000{,}000\ m)$$
$$v \approx 3640\ m/s \approx 13{,}100\ km/h \approx 8130\ mph$$

اکنون به بررسی تاثیر تغییرات پارامترها بر سرعت مداری می پردازیم.

- اگر جرم سیاره چهار برابر شود، سرعت گردش مداری دو برابر خواهد شد. بنابراین با فرض ثابت بودن شعاع مداری، چنانچه ماهواره به دور سیاره ای با چهار برابر جرم زمین بگردد، سرعتی برابر با حدود $3640\ m/s*2=7280\ m/s$ خواهد داشت.
- اگر فاصله ماهواره تا سیاره چهار برابر شود، سرعت آن نصف خواهد شد. بنابراین دورتر کردن ماهواره تا فاصله $30\ Mm*4=120\ Mm$ موجب کاهش سرعت آن به $3640\ m/s*0.5=1820\ m/s$ می شود.

به چند مثال دیگر نیز خواهیم پرداخت، اما پیش از آن، لازم است به یکسری مقدماتی نیز بپردازیم. ابتدا رابطه ای برای دوره تناوب گردش ماهواره به دست می آوریم. اگر ماهواره در مداری به فاصله r از مرکز زمین گردش کند، باید برای یک گردش کامل، این مسافت را بپیماید:

$$d = 2 \cdot \pi \cdot r$$

درباره این فرمول در بخش «حرکت در دوایر» توضیح بیشتری ارایه شده است. به خاطر داشته باشید که برای محاسبه اینکه جسمی چقدر طول می کشد تا مسافتی معین را بپیماید، لازم است مسافت را بر سرعت تقسیم کنیم. به طور مثال، اگر مسافتی برابر $d=400$ مایل را با سرعت متوسط $v=80$ مایل بر ساعت بپیماییم، مدت زمان این مسافرت برابر با $T=d/v=5$ ساعت خواهد بود.

به طور مشابه، برای اینکه ماهواره یک گردش کامل را به دور زمین داشته باشد، زمان آن T (برحسب ثانیه) برابر خواهد بود با:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r / v$$

اکنون رابطه ای که پیشتر برای سرعت ماهواره به دست آورده بودیم را در رابطه فوق جایگذاری می کنیم. بنابراین:

$$\mathbf{T = 2 \cdot \pi \cdot sq\ root\ (r^3 / G \cdot M)}$$

این رابطه به ما امکان می دهد تا مدار بسیار ویژه ای را به دست آوریم که آن را در مثال دوم خواهیم دید. پیش از آن، بهتر است ماهواره مثال پیشین را مجددا بررسی کنیم.

قبلا برای ماهواره ای که در فاصله $r=30\ Mm$ (سی میلیون متر) از مرکز زمین فاصله داشته است، سرعت گردش مداری برابر با $v=3640\ m/s$ را به دست آوردیم. در اینجا مسافتی را که ماهواره در یک دور کامل خواهد پیمود و دوره تناوب مربوط به آن را به دست خواهیم آورد.

$$d = 2 \cdot \pi \cdot 30{,}000{,}000\ m$$
$$d \approx 188{,}400{,}000\ m$$

همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، دوره تناوب زمانی گردش از تقسیم مسافت بر سرعت به دست می آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$T = d / v \approx 51{,}760\ s \approx 14.4\ h$$

هنگامی که زمین شش بار به دور خود بچرخد ($24\ h*6=144\ h$)، ماهواره ده دور کامل گردش خواهد کرد ($14.4\ h*10=144\ h$).

همچنان که فاصله ماهواره از زمین افزایش می یابد، مدت زمان دوره تناوب نیز افزایش می یابد. این بدان معنی است که در یک فاصله معین، ماهواره همان دوره تناوب چرخش زمین (۲۴ ساعت) را خواهد داشت و بنابراین همواره بر روی یک نقطه شناور باقی خواهد ماند. از اینرو این مدار خاص را زمین-آهنگ می نامند. مدار زمین-آهنگ در فاصله ای از مرکز زمین واقع شده است؟

۲۴ ساعت برابر با ۸۶۴۰۰ ثانیه است. با استفاده از فرمول دوره تناوب گردش مداری و این مقدار، مـی تـوان بـه راحتـی معادلـه ای برحسـب شعاع مدار زمین-آهنگ به دست آورد.

$$86{,}400 = 2 \cdot \pi \cdot \text{sq root}\ (r^3 / G \cdot M)$$
$$(43{,}200 / \pi)^2 = r^3 / G \cdot M$$
$$r \approx 42{,}200\ km$$

با کم کردن شعاع کره زمین (۶۴۰۰ کیلومتر) از مقدار فوق، ارتفاع مدار مذکور از سطح زمین برابر با ۳۵۸۰۰ کیلومتر به دست می آید. بـرای آنکه درک بهتری از این عدد داشته باشید درنظر بگیرید که هواپیماهای تجاری در ارتفاع ۱۰ تا ۱۲ کیلـومتری از سـطح زمـین حرکـت مـی کنند.

در سال ۱۹۴۵ نویسنده رمانهای علمی-تخیلی، آرتور سی. کلارک پیشنهاد کرد که مـاهواره هـایی در ایـن ارتفـاع قـرار گیرنـد تـا ارتباطـات رادیویی بین المللی امکان پذیر شود. در سال ۱۹۶۳ سینکام ۲، نخستین ماهواره عملیاتی در مدار زمـین-آهنـگ بـود. امـروزه بـیش از ۲۵۰ ماهواره در این مدار قرار داده شده اند.

در طول این کتاب ما مثالهای بیشتری درباره نحوه ترکیب دو نیرو برای ایجاد نتایج بسیار سودمند خواهیم پرداخت. بخش بعـدی مربـوط بـه همین موضوع است و دو نیرویی که اکنون درباره آنها صحبت کردیم را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

حلقه های قطار هوایی

حلقه های قطار هوایی یکی از هیجان انگیزترین بخشهای پارکهای شادی است. هیجان این حلقه ها بسـیار زیـاد بـوده بـه گونـه ای کـه مـن شخصا از آن پرهیز می کنم. ممکن است از خودتان بپرسید که چرا قطار هنگام حرکت در حلقه ها نمی افتد. پاسخ آن این اسـت کـه نیـروی گریز از مرکز نیروی گرانش را خنثی می کند. در اینجا می توانیم از فرمول ساده شده ای برای نیروی گرانش بهره گیریم زیرا ایـن مساله بـر روی سطح زمین رخ می دهد.

جرم قطار را با m (برحسب کیلوگرم)، سرعت قطار در بالای حلقه را با v (برحسب متر بر ثانیه) و شعاع حلقه را با r (برحسب متر) مشـخص می کنیم. برای استخراج کمینه سرعت لازم برای کامل نمودن موفقیت آمیز حلقه، فرمول نیروی گرانش را برابر با نیروی گریز از مرکـز قـرار می دهیم:

$$m \cdot g = m \cdot v^2 / r$$
$$\mathbf{v = sq\ root\ (r \cdot g)}$$

درست همانند مساله مربوط به ماهواره ها، جرم عامل تاثیرگذاری نخواهد بود. قطار سنگین تر نیروی جاذبه گرانشـی بیشـتر و در عـین حـال نیروی دافعه گریز از مرکز بیشتری نیز دارد، لذا نسبت آنها تغییر نخواهد کرد. این موضوع بسیار مهـم اسـت، زیـرا دیگـر لازم نیسـت دربـاره تعادل نیروها در قطار نگران تغییرات تعداد مسافران آن باشیم.

همانگونه که می بینید، عامل تعیین کننده در اینجا، شعاع حلقه است. اگر آن را چهار برابر کنیم، سرعت مورد نیاز دو برابـر مـی شـود. البتـه شتاب گرانش نیز در این فرمول وجود دارد، اما معمولا ما به دنبال راه اندازی قطار هوایی بر روی ماه یا دیگر سیارات نیستیم، لـذا آن را ثابـت در نظر می گیریم.

کمیت دیگر مورد نظر در اینجا، سرعت مورد نیاز برای ورود و خروج به/ از حلقه است. توجه داشته باشید که برای محاسبه تعادل نیروها تنهـا لازم است سرعت در بالای حلقه را داشته باشیم. اما طبعا این سرعت نتیجه سرعت ورود به حلقه است. می توانیم با اسـتفاده از قـانون بقـای انرژی که در بخشهای بعد به آن خواهیم پرداخت، فرمولی برای سرعتهای ورود و خروج به/ از حلقه (برحسب متر بر ثانیه) بیابیم.

$$\mathbf{u = sq\ root\ (5 \cdot r \cdot g) \approx 2.24 * v}$$

این رابطه با این فرض به دست آمده که از اصطکاک با زمین و مقاومت هوا چشم پوشی شده باشد (که معمولا برای حلقه های قطار هوایی تقریب خوبی است).

بزرگترین حلقه قطار هوایی در کوه جادویی شش پرچم در شهر والنسیا واقع در ایالت کالیفرنیا واقع شده است. شعاع آن تقریبا برابر با $r=22\ \text{m}$ است. قطار چه سرعتی در بالای حلقه داشته باشد تا سقوط نکند؟ کمینه سرعت ورود به حلقه آن چقدر باید باشد؟

به رابطه نخست می پردازیم:

$$v = \text{sq root}\ (22\ m \cdot 9.81\ m/s^2)$$
$$v \approx 15\ m/s \approx 53\ km/h \approx 33\ mph$$

در بالای حلقه، لازم است سرعت قطار دست کم برابر با ۳۳ مایل بر ساعت (۵۳ کیلومتر بر ساعت) باشد. همچنین برای کمینه سرعت ورود به حلقه، مطابق با رابطه دوم، این سرعت باید 2.24 برابر سرعت بالای حلقه باشد:

$$u \approx 33.5\ m/s \approx 120.5\ km/h \approx 75\ mph$$

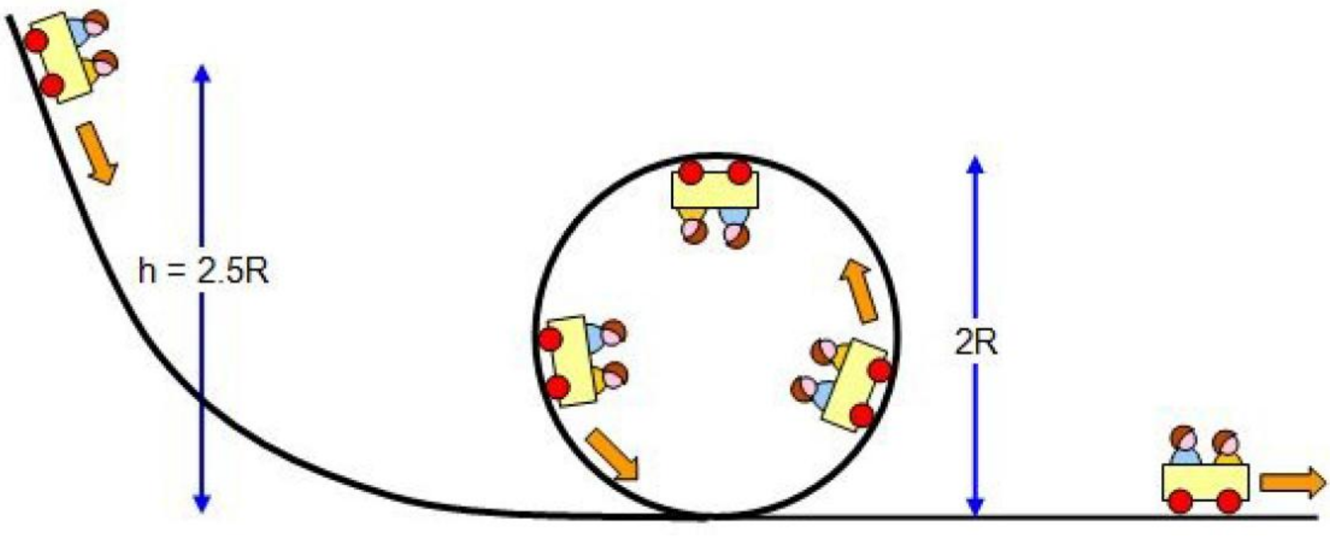
غالبا سرعت ورود به حلقه با استفاده از یک رهاشدن سریع از ارتفاع (که خود تجربه ای بسیار هیجان انگیز است) به دست می آید. چه اختلاف ارتفاعی برای رها شدن مورد نیاز است تا این سرعت ورود به حلقه تامین شود؟ در بخش «سرعت برخورد» آموختیم که چنانچه جسمی آزادانه از ارتفاع h رها شود، سرعت v آن برابر خواهد بود با:

$$v = \text{sq root}(2 \cdot g \cdot h)$$

جالب است که چنانچه از اثرات نیروهای اصطکاکی صرف نظر کنیم، این رابطه برای قطار هوایی نیز صادق است. بنابراین برای محاسبه ارتفاع رها شدن h (برحسب متر) لازم برای رسیدن به سرعت ورود u (برحسب متر بر ثانیه) کافی است از رابطه بالا h را به دست آوریم:

$$\mathbf{h = u^2 / (2 \cdot g) = 2.5 \cdot r}$$

پس از وارد کردن رابطه دوم این بخش، رابطه سرعت ورود، به فرمول بالا، می توانیم نتیجه بگیریم که ارتفاع مورد نیاز برای سقوط همواره 2.5 برابر شعاع می باشد.



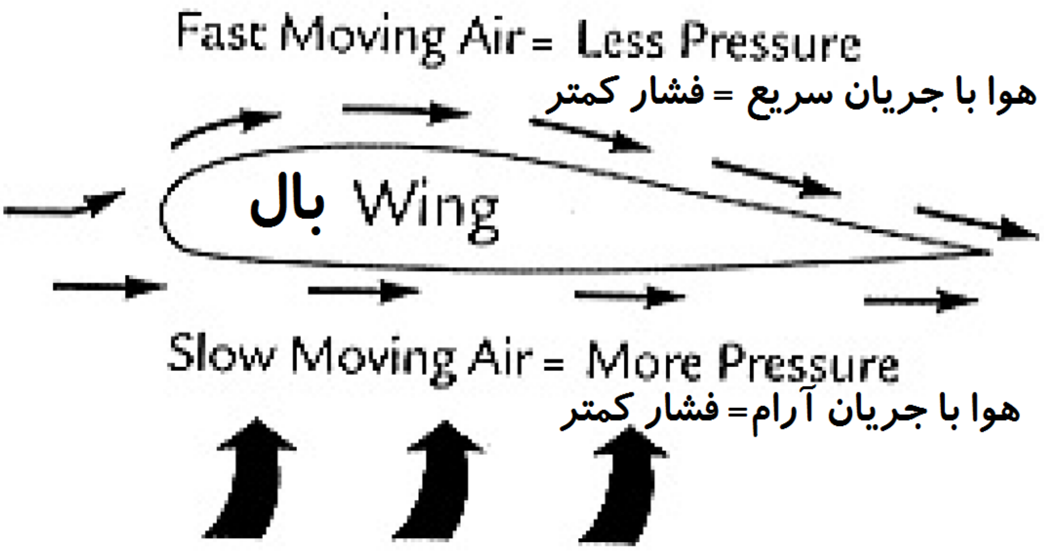
مجددا مساله مربوط به حلقه قطار هوایی با شعاع $r=22\ \text{m}$ را بررسی می کنیم. اگر قطار تنها در اثر گرانش حرکت کند، برای آنکه یک حلقه کامل را دور بزنند باید پیش از ورود به حلقه دست کم از ارتفاع $h=55\ \text{m}=180\ \text{ft}$ رها شود.

البته در واقعیت مساله اندکی پیچیده تر از این است. اصطکاک با زمین و مقاومت هوا باید مدنظر قرار گرفته و حلقه ها غالبا دایره کامل نیستند بلکه شکل کلوتوئیدی دارند. اما به عنوان تقریب اولیه فرمولهای بالا جالب توجه می باشند.

نیروی برآ

درست همانند ماهواره هایی که درباره آنها صحبت کردیم، هواپیماها نیز با نیروی جاذبه گرانش مواجه می شوند. البته آنها با روشی دیگر با این نیرو مقابله می کنند. بنابراین به بررسی چگونگی پرواز خواهیم پرداخت. هنگامی که یک هواپیما پرواز می کند، بخشی از هوا روی بال و بخشی دیگر از هوا از زیر بال جریان می یابد. به دلیل هندسه بال، هوایی که از روی بال حرکت می کند با سرعت بیشتری نسبت به هوایی که از زیر حرکت می کند، جریان می یابد. نکته اصلی مساله نیز همین جاست، زیرا مطابق با اصل برنولی، هرچه سرعت جریان هوا بیشتر باشد، فشار کمتری دارد.

بنابراین جدا کردن هوا توسط بال، منجر به بروز اختلاف فشار می شود. بالای بال، هوا سریع جریان می یابد و بنابراین، فشار اندک است، درحالی که در زیر بال وضعیت برعکس است. این اختلاف فشار بال، و به همراه هواپیما، را به سمت بالا هل می دهد. نیروی حاصل شده نیروی برآ نامیده شده و فرمول ساده ای برای محاسبه آن وجود دارد.



کمیتهای مورد نیاز برای فهم فرمول عبارتند از: سرعت هواپیما نسبت به هوا v (برحسب متر بر ثانیه)، مساحت A بال (برحسب مترمربع)، چگالی هوای اطراف هواپیما D (برحسب کیلوگرم بر متر مکعب) و کمیت کمتر شناخته شده ای به نام ضریب برآ c (بدون بعد). ضریب برآ بستگی به هندسه خاص بال و زاویه میان محور بال و جریان هوا دارد که به آن زاویه حمله گفته می شود.

با داشتن این کمیتها، محاسبه نیروی برآ (برحسب نیوتون) امکان پذیر است. کافی است مقادیر در فرمول زیر قرار گیرد:

$$\mathbf{L = 0.5 \cdot c \cdot D \cdot A \cdot v^2}$$

هواپیمای بوئینگ ۷۴۷ که جمبوجت نیز نامیده می شود، در زاویه حمله صفر ضریب برآی c=0.3 دارد. می خواهیم نیروی برآ را در ارتفاع پرواز محاسبه کنیم. در این ارتفاعها چگالی هوا تقریبا برابر با D=0.3 kg/m^3 است. مساحت سطح بالهای جمبوجت برابر با A=511 m^2 است و سرعت پرواز برابر با v=305 m/s می باشد. بنابراین نیروی برآ برابر می شود با:

$$L = 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.3\ kg/m^3 \cdot 511\ m^2 \cdot (305\ m/s)^2$$

$$L \approx 2{,}150{,}000\ N$$

بنابراین چگونه این نیرو با نیروی گرانش (یا به عبارتی وزن) جمبوجت قابل مقایسه است؟ نیازی بـه محاسـبه نیسـت. بـرای آنکـه هواپیما بتواند در ارتفاع پرواز باقی بماند، نیروی برآ باید نیروی گرانش را خنثی کنـد. بنـابراین در ارتفـاع پـرواز، نیروهـای وزن و برآ با هم برابراند.

چگونه پارامترهای فرمول بر نیروی برآ تاثیر می گذارند؟

- اگر ضریب برآ دو برابر شود، نیروی برآ نیز دو برابر خواهد شد. بنابراین اگر جمبوجت ضریب برآی خود را به 0.3*2=0.6 افـزایش دهد (به طور مثال با افزایش زاویه حمله)، نیروی برآ به 2150 kN*2=4300 kN افزایش می یابد. دو برابر شدن چگالی هـوا D و مساحت بال A نیز تاثیر مشابهی بر روی نیروی برآ خواهند داشت.
- اگر سرعت هواپیما دو برابر شود، نیروی برآ چهار برابر خواهد شد. برای جمبوجت ایـن بـه ایـن معنـا اسـت کـه در سـرعت 305 m/s*2=610 m/s، هواپیما نیروی برآی 2150 kN*4=8600 kN را تجربه خواهد کرد (و احتمالا به سـرعت در هـم خواهـد شکست زیرا سازه آن نمی تواند چنین سرعتهایی را تحمل کند).

فرمول دیگری در محاسبه نیروی برآ سودمند است. چگالی هوا ثابت نیست و با ارتفاع تغییر می کند. هرچه بالاتر رویـم، چگـالی هـوا کـاهش می یابد. فرمول زیر می تواند برای تقریبا چگالی هوا D (برحسب کیلوگرم بر متر مکعب) در ارتفاع معین h (برحسب متر) به کار رود.

$$\mathbf{D = 1.25 \cdot exp(-0.0001 \cdot h)}$$

مطابق با این فرمول، چگالی هوا در سطح دریا (h=0 m) و بر بالای قله اورست (h=8850 m) به ترتیب برابر است با:

$$D = 1.25 \cdot exp(-0.0001 \cdot 0\ m) = 1.25\ kg/m^3$$
$$D = 1.25 \cdot exp(-0.0001 \cdot 8850\ m) \approx 0.52\ kg/m^3$$

چگونه این تغییرات چگالی بر نیروی برآ تاثیر می گذارد؟ به خاطر دارید که با کاهش چگالی هوا، نیروی برآ نیـز کـاهش مـی یابـد. بنـابراین، هنگامی که ارتفاع افزایش پیدا می کند، نیروی برآ کاهش می یابد. یا به بیان دیگر، همچنان که بالا می روید بایـد سـریعتر حرکـت کنیـد تـا مقدار معینی از نیروی برآ را داشته باشید (که همان کاری است که هواپیماها هنگام صعود انجام می دهند).

نتیجه دیگر این فرمول آن است که در فرودگاه های با ارتفاع بالا، سرعت لازم برای برخاستن هواپیما بیشتر اسـت. ایـن واقعیـت نیـز کـه در ارتفاعهای بالاتر موتورهای هواپیما نیروی پیشران کمتری (و نیز نیروی معکوس پیشران کمتری) تولید می کنند، فرآیند برخاستن و بر زمین نشستن هواپیما را در چنین فرودگاه هایی پرچالش تر می کند.

سرعت هواپیما

در بخش پیشین بیان شد که برای رسیدن به پرواز در سطح افق، نیاز به نیروی برآیی وجود دارد تا دقیقا برابر با نیروی جاذبه گـرانش باشـد. بنابراین، می توان فرمولهای نیروهای برآ و وزن را با هم برابر قرار داد.

$$0.5 \cdot c \cdot D \cdot A \cdot v^2 = m \cdot g$$

توجه داشته باشید که برای نیروی گرانش از فرمول ساده شده استفاده شده است که ممکن است برای شما عجیب به نظر برسد، زیرا گفته بودیم این فرمول تنها بر روی سطح زمین درست است، در حالی که در این مساله اینگونه نیست. اما به ابعاد و فواصل این مساله توجه کنید. شعاع زمین حدود 6400 کیلومتر است، در حالی که هواپیماها معمولا در ارتفاع ۱۲ کیلومتر یا پایینتر پرواز می کنند. برای بسیاری از مقاصد عملی، ارتفاع ۱۲ کیلومتر را می توان از نظر شتاب گرانش با سطح زمین یکسان دانست.

با برابر قرار دادن نیروهای برآ و وزن و حل معادله برحسب v، می توانیم سرعت تعادلی هواپیما را محاسبه کنیم. نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$v = \text{sq root}\,(2 \cdot m \cdot g / (c \cdot D \cdot A))$$

هواپیمای سِسنا ۱۵۲ حاوی بار، جرمی برابر با حدود m=700 kg، ضریب برآی c=1.2 و مساحت بال A=15 m^2 دارد. سرعت تعادلی آن در ارتفاعات بسیار پایین چقدر است؟ از چگالی هوا در سطح دریا D=1.25 kg/m^3 و g=9.81 m/s^2 استفاده خواهیم کرد. با وارد کردن این مقادیر در فرمول بالا خواهیم داشت:

$$v = \text{sq. root}\,(2 \cdot 700 \cdot 9.81 / (1.2 \cdot 1.25 \cdot 15))$$
$$v \approx 25\ m/s = 90\ km/h \approx 56\ mph$$

اکنون به بررسی تاثیر تغییرات ورودیها بر سرعت تعادلی هواپیما می پردازیم:

- اگر جرم هواپیما چهار برابر شود، سرعت تعادلی دو برابر خواهد شد. هواپیمایی با جرم چهار برابر جرم سِسنا ۱۵۲ (با فرض ثابت بودن بقیه پارامترها) باید در سرعت 56 mph*2=112 mph پرواز کند تا ارتفاع خود را حفظ کند.
- اگر ضریب پسا (یا چگالی یا مساحت بال) چهار برابر شود، سرعت تعادلی نصف خواهد شد. بنابراین اگر بتوانیم هندسه ای برای بال بیابیم که سبب شود ضریب پسا چهار برابر شود، هواپیمای سِسنا ۱۵۲ می تواند با سرعت کمتر 56 mph/2=28 mph پرواز کند و همچنان ارتفاع خود را حفظ کند.

در این بخش یک بار دیگر نشان داده شد که با ترکیب فرمولها می توان نتایج ارزشمندی به دست آورد. مفهوم تعادل نیروها هم برای ماهواره ها و هم برای هواپیماها به کار گرفته می شود. هرجا که جسمی ارتفاع خود را حفظ کند، ساکن بایستاد و یا در مسیر مستقیم حرکت کند، باید تعادل نیروها چنین چیزی را امکان پذیر کرده باشد.

ترکیب معنادار فرمولها تنها به این موارد محدود نمی شود. تعادل نیروها، بقای انرژی، مومنتوم خطی و مومنتوم زاویه ای نیز می تواند از این منظر مورد بررسی قرار گیرد.

مومنتوم

اکنون به یک مفهوم بسیار بنیادین فیزیک به نام مومنتوم خطی می پردازیم. تعریف آن بسیار ساده است. اگر جسمی با جرم m (برحسب کیلوگرم) با سرعت v (برحسب متر بر ثانیه) حرکت کند مومنتوم آن برابر خواهد بود با:

$$p = m \cdot v$$

بنابراین جسم سنگینی که با سرعت زیادی در حال حرکت است مومنتوم زیادی دارد، در حالی که جسم سبکی که با سرعت اندک حرکت می کند مومنتوم اندکی دارد. اگر جسمی اصلا حرکت نکند، مومنتوم آن صفر است. بنابراین چرا این مفهوم مورد بررسی قرار می گیرد؟ به نظر می رسد تعریف چنین کمیتی مصنوعی باشد. اما یک نتیجه زیبایی برای آن وجود دارد: در هر سیستمی از اجسام، مومنتوم کل بدون تغییر خواهد بود. بنابراین اگر جسمی مومنتوم از دست دهد اجسام دیگر دقیقا همان مقدار مومنتوم را به دست خواهند آورد. به زبان ریاضی:

$$\mathbf{p = constant} \quad \text{(ثابت)}$$

و این همان فرمول بسیار مهم است. هیچ کس نمی تواند اهمیت آن را نادیده بگیرد. اهمیت آن به اندازه قانون بقای انرژی است و بدون آن، بسیاری از جنبه های طبیعت برای ما ناآشنا باقی می ماند. این فرمول برای دسته های ستارگان و نیز دو توپ بیلیارد کاربرد دارد. تا آنجا که می دانیم، این قانون برای تمام جهان درست است و چگونگی رفتار بسیاری از پدیده های عالم را توضیح می دهد.

در مثال ساده زیر به این موضوع پرداخته شده است.

لگد زدن تفنگ، یکی از نتایج بقای مومنتوم است. پیش از آنکه گلوله ای شلیک شود، تفنگ و گلوله هر دو حالت سکون قرار دارند. بنابراین مومنتوم کل صفر است. هنگامی که گلوله شلیک می شود، در جهت خاصی مومنتوم پیدا می کند. برای بدون تغییر ماندن مومنتوم، تفنگ نیز باید همان مقدار مومنتوم را در جهت مخالف داشته باشد.

یک گلوله 9 mm دارای جرم m=0.012 kg است و در سرعت حدود v=450 m/s (که بیشتر از سرعت صوت است) شلیک می شود. در فرآیند شلیک، این گلوله مومنتوم پیدا می کند:

$$p = 0.012\ kg \cdot 450\ m/s = 5.4\ kg\ m/s$$

اما این چه تاثیری بر تفنگ با جرم m'=3kg می گذارد؟ از آنجا که مومنتوم باید بدون تغییر بماند، رابطه زیر باید درست باشد:

$$5.4\ kg\ m/s = 3\ kg \cdot v'$$

که در آن v' سرعت به عقب لگد زدن تفنگ است. با حل این معادله برای v' خواهیم داشت:

$$v' \approx 1.8\ m/s \approx 6.5\ km/h \approx 4\ mph$$

کاربرد کلاسیک دیگر بقای مومنتوم در پیشرانش راکتها با استفاده از گازها مـی باشـد. راکتـی را در حالـت سـکون در فضـا تصـور کنید. برای سرعت گرفتن، m=3000 kg از گازهای داغ را در سرعت v=4200 m/s به سمت بیرون تخلیه می کنـد. جـرم راکـت برابر با m'=10000 kg است. پس از خاموش شدن موتور، سرعت آن چقدر است؟

مومنتوم گاز خروجی برابر است با:

$$p = 3000\ kg \cdot 4200\ m/s = 12{,}600{,}000\ kg\ m/s$$

برای آنکه مومنتوم بدون تغییر بماند، راکت باید همان مقدار مومنتوم را در جهت معکوس پیدا کند:

$$12{,}600{,}000\ kg\ m/s = 10{,}000\ kg \cdot v'$$
$$v' = 1260\ m/s \approx 4540\ km/h \approx 2810\ mph$$

توجه داشته باشید که از آنجا که هیچ نیروی مقاومت هوا یا گرانشی در کار نیست، مهم نیست که راکـت بـا چـه نرخـی گـاز را مـی سوزاند. می تواند با نرخ 30 kg/s به مدت 100 ثانیه یا با نرخ 3 kg/s به مدت 1000 ثانیه بسوزاند، در هر حالت سرعت نهایی آن یکسان خواهد بود.

در بخشهای بعدی به دیگر قوانین پایستگی یا بقا خواهیم پرداخت. این قـوانین پایسـتگی در انجـام محاسـبات و فهـم چگـونگی فرآینـدهای طبیعت کمک می کند، بنابراین باید مطمئن شوید که کاملا آنها را درک کرده اید.

شکلهای انرژی

این بخش در واقع مقدمه ای برای بخش بعد است که به بقای انرژی پرداخته خواهد شد. برای انجام این کـار، نیـاز داریـم تـا برخـی از انـواع متداول انرژی را بشناسیم. ما بر انواع انرژی که در محاسبه حرکت به کار می روند تمرکز می کنـیم. همـه انـواع انـرژی بـا واحـد ژول (J) یـا واحدهای برگرفته از آن اندازه گیری می شوند.

یک شکل انرژی که ما مکررا به آن نیاز داریم انرژی جنبشی E(kin) است. این انرژی مربوط به جسمی است که دارای سـرعت باشـد و نیـز کمترین مقدار انرژی است که باید به جسم داده شود تا به سرعت معینی برسد. البته تنها به دو پارامتر وابسته است: جرم جسم m (برحسـب کیلوگرم) و سرعت آن (برحسب متر بر ثانیه).

$$\mathbf{E(kin) = 0.5 \cdot m \cdot v^2}$$

توجه داشته باشید که وجود مربع سرعت به این معنی است که اگر سرعت دو برابر شود، انرژی جنبشی چهار برابر خواهد شد.

چگونه انرژیهای جنبشی هواپیماهای کوچک و بزرگ مقایسه می شود؟

یک هواپیمای حامل بار سِسنا ۱۵۲ با جرم m=700 kg و سرعت پرواز حدود v=53 m/s، انرژی جنبشی برابر با این مقدار را داراست:

$$E(kin) = 0.5 \cdot 700\ kg \cdot (53\ m/s)^2$$
$$E(kin) \approx 983{,}000\ J$$

بنابراین این هواپیمای کوچک در ارتفاع پرواز دارای انرژی جنبشی در مرتبه یک میلیون ژول می باشد. انرژی جنبشی جمبوجت حاوی بار چقدر است؟ جدیدترین مدلهای آن دارای جرم m=400000 kg و سرعت پرواز v=255 m/s می باشند. مقدار انرژی جنبشی آن برابر است با:

$$E(kin) = 0.5 \cdot 400{,}000\ kg \cdot (255\ m/s)^2$$
$$E(kin) \approx 13{,}000{,}000{,}000\ J$$

بنابراین در این مورد انرژی جنبشی برابر ۱۳ میلیارد ژول است. با انرژی جنبشی مورد نیاز برای رساندن هواپیمای بوئینگ ۷۴۷ به ارتفاع پرواز می توان ۱۳۰۰۰ هواپیمای سِسنا ۱۵۲ را به ارتفاع پرواز خود رساند. به این ترتیب می توان نسبت به اعداد و مقادیر ارایه شده احساس واقعی پیدا کرد.

نوع دیگر انرژی که اجسام می توانند داشته باشند و با حرکت مرتبط است، انرژی پتانسیل E(pot) است. این انرژی است که جسم در اثر موقعیت خود در میدان گرانشی پیدا می کند. اگر جسمی در ارتفاع بسیار بالا قرار داشته باشد، پتانسیلی برای رها کردن مقدار زیادی انرژی در اثر سقوط کردن را داراست. برای اجسام نزدیک به سطح زمین، تنها کمیتهای مورد استفاده عبارتند از جرم جسم m (برحسب کیلوگرم)، شتاب گرانشی g (برحسب متر بر مجذور ثانیه)، و ارتفاع آن h (برحسب متر).

$$\mathbf{E(pot) = m \cdot g \cdot h}$$

تمامی روابط اینجا خطی هستند. اگر جرم (یا شتاب گرانشی یا ارتفاع) دو برابر شوند، انرژی پتانسیل نیز دو برابر می شود. به مثالی در این زمینه بپردازیم.

مجددا به مثال هواپیماهای سِسنا و جمبوجت می پردازیم. آنها ارتفاعهای پرواز به ترتیب h=2200 m و h=11000 m دارند. انرژیهای پتانسیل آنها در این وضعیت چقدر است؟ برای شتاب گرانشی ما همواره عدد g=9.81 m/s^2 را به کار می بریم. ابتدا به سِسنا می پردازیم:

$$E(pot) = 700\ kg \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 2200\ m$$
$$E(pot) \approx 15{,}100{,}000\ J$$

برای جمبوجت:

$$E(pot) = 400{,}000\ kg \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 11{,}000\ m$$
$$E(pot) \approx 43{,}200{,}000{,}000\ J$$

پیش از پرداختن به موضوع قانون بقای انرژی، یک نوع انرژی دیگر مرتبط با حرکت را نیز مورد بررسی قرار می دهیم. این انرژی، انرژی اصطکاکی E(fric) است. نام آن گویای همه چیز است: انرژی مورد نیاز برای غلبه بر نیروهای اصطکاکی. برای ساده شدن مسایل، صرفا به اصطکاک با زمین می پردازیم.

کمیتهای مورد استفاده در اینجا عبارتند از: جرم جسم در حال حرکت m (برحسب کیلوگرم)، شتاب گرانشی g (برحسب متر بر مجذور ثانیه) و مسافتی که جسم می پیماید d (برحسب متر). علاوه بر آن به ضریب اصطکاک μ (بدون بعد) نیز نیاز داریم، که به جنس سطح زمین، جنس جسم و ماهیت تماس میان آن دو وابسته است.

$$\mathbf{E(fric) = \mu \cdot m \cdot g \cdot d}$$

در اینجا نیز همه روابط خطی است، اگر هر یک از ورودیها را دو برابر کنید، انرژی اصطکاکی نیز دو برابر می شود. اکنون به یک مثال بپردازیم.

می خواهیم یک بلوک بتنی با m=100 kg را به فاصله d=10 m بر روی زمین چوبی جابجا کنیم. ضریب اصطکاک بتن روی چوب μ=0.6 است. چه مقدار انرژی برای غلبه بر اصطکاک مورد نیاز است؟

$$E(fric) = 0.6 \cdot 100\ kg \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 10\ m$$
$$E(fric) \approx 5900\ J$$

بنابراین اگر بتوانیم توانی برابر با 200 وات (=200 ژول بر ثانیه) فراهم کنیم این فرآیند حدود ۳۰ ثانیه طول خواهد کشید. به جای جابجا کردن بلوک بتنی ۱۰۰ کیلوگرمی با هل دادن آن بر روی زمین، آن را بر روی یک گاری کوچک گذاشته و گاری را هل می دهیم. ضریب اصطکاک به μ=0.03 کاهش می یابد. البته، اکنون لازم است مقداری انرژی پتانسیل برای بلند کردن بلوک تا ارتفاع h=0.25 m اعمال کنیم. آیا بر مبنای انرژی، این روش هوشمندانه تر است؟

انرژی اصطکاکی مورد نیاز برابر است با:

$$E(fric) = 0.03 \cdot 100\ kg \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 10\ m$$
$$E(fric) \approx 295\ J$$

انرژی پتانسیل مورد نیاز برای بلند کردن و قرار دادن بلوک بتنی روی گاری برابر است با:

$$E(pot) = 100\ kg \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 0.25\ m$$
$$E(pot) \approx 245\ J$$

ما انرژی برای پایین گذاشتن بلوک سیمانی را درنظر نمی گیریم. این کار توسط گرانش (البته نه به صورت مطلوب و آرام) می تواند انجام شود. بنابراین برای جابجایی بلوک بتنی به فاصله ده متر با استفاده از گاری ما باید انرژی کل 295 J + 245 J = 540 J را فراهم کنیم، که بسیار کمتر از 5900 J مورد نیاز برای هل دادن بلوک بر روی زمین با نیروی زیاد است.

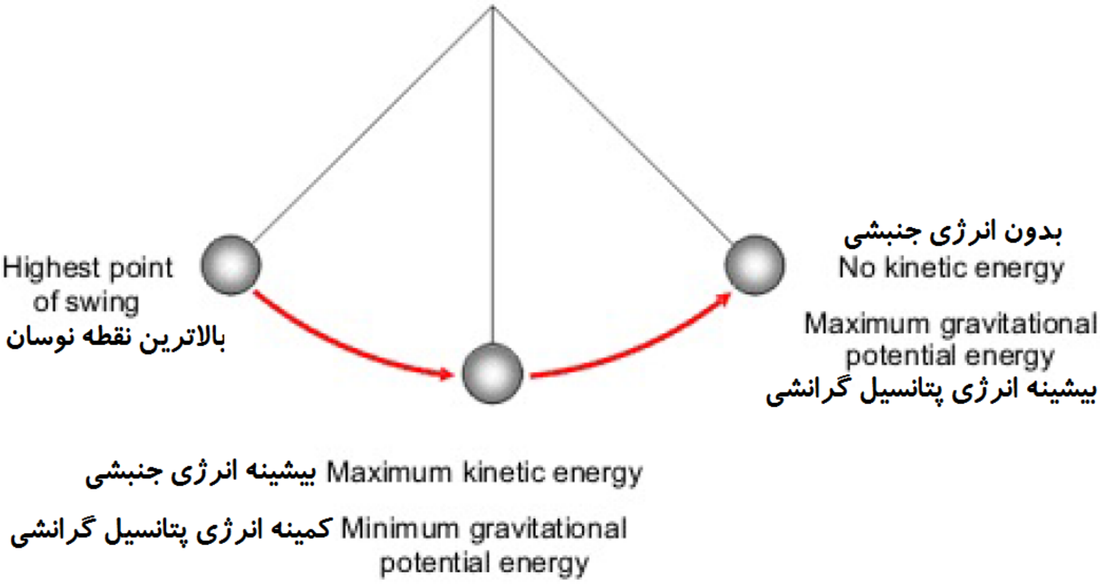
اکنون که برخی از انواع متداول انرژی و نحوه محاسبه آنها را شناختیم می توانیم به یکی از مهمترین و اساسی ترین قوانین بنیادین فیزیک بپردازیم.

بقای انرژی

بیان قانون بقای انرژی بسیار ساده و خلاصه است: مقدار کل انرژی در هر سیستمی ثابت است. به زبان ریاضی:

E=ثابت.

این قانون به همین سادگی است. هیچ شرط و تبصره و استثنائی نیز ندارد. همه فرآیندهای مشاهده شده تا به امروز، چه زیر میکروسکوپ الکترونی و یا در اعماق فضا، کاملا از این قانون پیروی می کنند. تا آنجا که ما می دانیم، این قانون در هر مقیاسی و در هر جای جهان صادق است. کاربرد قانون بقای انرژی منجر به حصول فرمولها و اکتشافات بسیار مهمی شده است. ما در اینجا تنها به اشاره ای بسیار مختصر به این موضوع مهم بسنده می کنیم و لازم است شما مطالعات تکمیلی را در این زمینه ادامه دهید.



به عنوان نخستین کاربرد، نگاهی به سقوط آزاد می اندازیم. توجه داشته باشید که تحلیلهای ذیل برای آونگهای در حال نوسان یا تقریبا هرگونه حرکت بدون اصطکاکی بر روی زمین در ارتفاعهای مختلف، قابل کاربرد است. از منظر بقای انرژی، تفاوت زیادی ندارند.

هنگامی که جسمی در ارتفاع بالا است، مقدار زیادی انرژی پتانسیل دارد. هنگامی که سقوط می کند، انرژی پتانسیل خود را از دست می دهد. در عین حال سرعت نیز می گیرد، که به معنی افزایش انرژی جنبشی آن است. اگر نیروی دیگری به غیر از گرانش وجود نداشته باشد (بدون اصطکاک باشد)، آنگاه مجموع دو انرژی جنبشی و پتانسیل باید ثابت بماند.

E(جنبشی) + E(پتانسیل) = ثابت.

این رابطه امکان محاسبه سرعت در هر ارتفاعی را می دهد. توجه داشته باشید که در ابتدا همه انرژی به شکل انرژی پتانسیل است. هنگامی که جسم به زمین می رسد، همه انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی تبدیل شده است. بنابراین اگر تنها به سرعت برخورد بپردازیم، می توانیم بقای انرژی را به این شکل بیان کنیم:

E(جنبشی بر روی زمین)=E(پتانسیل اولیه)

اگر ارتفاع اولیه را با h (برحسب متر) و سرعت برخورد را با v (برحسب متر بر ثانیه) نشان دهیم، به این رابطه می رسیم:

$$0.5 \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

از این رابطه به راحتی می توان سرعت برخورد را به دست آورد:

$$\mathbf{v = sq\ root\ (2 \cdot g \cdot h)}$$

این فرمول برای شما آشنا نیست؟ اگر بخش «سرعت برخورد» را خوانده باشید باید آشنا باشد، چراکه آنجا نیز به این موضوع پرداخته بودیم. اکنون می دانید که این فرمول مهم از کجا آمده است. این رابطه در واقع یکی از نتایج قانون بقای انرژی است. حال به کاربرد بعدی این قانون بپردازیم.

هنگامی که سوار بر خودرویتان، فشار دادن پدال گاز را متوقف کنید خودرو به آرامی از حرکت باز می ایستد. همچنان که خودرو متوقف می شود، انرژی جنبشی کاهش می یابد. این انرژی کجا می رود؟ با فرض آنکه جاده افقی است، تغییری در انرژی پتانسیل رخ نمی دهد. بنابراین این انرژی باید به انرژی اصطکاکی تبدیل شود (مجددا از مقاومت هوا چشم پوشی می شود). هنگام فرآیند توقف تدریجی، مجموع انرژیهای جنبشی و اصطکاکی باید ثابت بماند تا قانون بقای انرژی برقرار باشد:

E(اصطکاکی)+E(جنبشی)=ثابت.

این فرمول به ما امکان می دهد تا سرعت خودرو را پس از پیمودن فاصله ای مشخص، تعیین کنیم. غالبا برای ما آخرین وضعیت اهمیت دارد، هنگامی همه انرژی جنبشی اولیه به انرژی اصطکاکی تبدیل می شود. به زبان ریاضی:

E(جنبشی اولیه)=E(اصطکاکی نهایی)

چنانچه سرعت اولیه را با v (برحسب متر بر ثانیه) و مسافتی که خودرو تا توقف کامل پیموده را با d (برحسب متر) نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot d = 0.5 \cdot m \cdot v^2$$

بنابراین مسافتی که خودرو تا توقف کامل می پیماید برابر است با:

$$\mathbf{d = 0.5 \cdot v^2 / (\mu \cdot g)}$$

ملاحظه می کنید که در اینجا هم جرم از معادله حذف شد. جرم خودرو تاثیری بر مسافتی که تا توقف کامل می پیماید ندارد. همچنین مشاهده می شود که در این فرمول نیز توان دوم سرعت ظاهر شده است، بدین معنی که اگر سرعت خودرو دو برابر شود، مسافتی که تا توقف کامل می پیماید چهار برابر می شود. جالب آن است که همه این فرمولها از اعمال قانون بقای انرژی به دست آمده اند.

ضریب اصطکاک غلتشی چرخ خودرویی بر روی آسفالت برابر با حدود 0.015 است. خودرویی که با سرعت 30 مایل بر ساعت (13.5 متر بر ثانیه) حرکت می کند در چه مسافتی متوقف می شود؟ از فرمولی که اخیرا به دست آورده ایم استفاده کرده و مقادیر آن را جایگذاری می کنیم.

$$d = 0.5 \cdot 13.5^2 / (0.015 \cdot 9.81) \approx 620\ m \approx 2000\ ft$$

از آنجا که از مقاومت هوا چشم پوشی کردیم، مقدار واقعی اندکی کوچکتر از مقدار فوق است. همچنان که سرعت افزایش می یابد تاثیر مقاومت هوا چشمگیرتر شده و باید لحاظ شود. بنابراین فرمول استخراج شده از قانون بقای انرژی محدودیتهای خود را داراست، اما این مشکل ربطی به قانون بقای انرژی ندارد، بلکه مربوط به تحلیل ما است که باید عوامل دیگر را هم در آن لحاظ کنیم.

امیدواریم این بخش به شما کمک کرده باشد تا معنی و اهمیت قانون بقای انرژی در فیزیک را دریافته باشید. اگر می خواهید به مطالعه فیزیک ادامه دهید، مطمئن شوید که انواع انرژیهای مختلف را به خوبی شناخته اید و نحوه ترکیب آنها را برای استخراج فرمولهای جدید درک کرده اید.

گرما

فرمولی که در این بخش به آن می پردازیم سبب شد تا در دوران نوجوانی من به فیزیک علاقمند شوم. زیرا متوجه شدم با آن کمیت مهمی را می توان به این سادگی محاسبه کرد. این فرمول ساده و مهم با مبحث بخش پیشین، انرژی نیز مرتبط می باشد.

برای گرم کردن جسمی، نیاز به مقدار مشخصی انرژی E (برحسب ژول) دارید. برای محاسبه این مقدار انرژی به سه پارامتر ورودی نیاز داریم: جرم جسمی که می خواهیم گرم شود m (برحسب کیلوگرم)، اختلاف دمای میان وضعیت اولیه و وضعیت نهایی T (برحسب درجه سانتیگراد)، و گرمای ویژه ماده ای که می خواهیم گرم کنیم c (برحسب ژول بر کیلوگرم درجه سانتیگراد). این رابطه کاملا ساده است:

$$\mathbf{E = c \cdot m \cdot T}$$

اگر هر یک از پارامترهای ورودی را دو برابر کنیم، انرژی مورد نیاز برای گرم کردن نیز دو برابر خواهد شد. فرمول زیر نیز برای حل مسایل مرتبط با گرم کردن بسیار سودمند است:

$$E = P \cdot t$$

که در آن P (برحسب وات مساوی با ژول بر ثانیه) توان وسیله ای است که گرما تولید می کند و t (برحسب ثانیه) مدت زمان اعمال گرما می باشد.

ظرفیت گرمای ویژه آب برابر با c=4200 ژول بر کیلوگرم درجه سانتیگراد است. برای آنکه m=1 kg آب از دمای اتاق (20 درجه سانتیگراد) به نقطه جوش (100 درجه سانتیگراد) برسد چقدر انرژی مورد نیاز می باشد؟ توجه داشته باشید که اختلاف دما میان وضعیت اولیه و وضعیت نهایی T=80 درجه سانتیگراد است. بنابراین همه پارامترهای ورودی مورد نیاز مشخص می باشد.

$$E = 4200 \cdot 1 \cdot 80 = 336{,}000\ J$$

پرسش دیگر آن است که با یک اجاق الکتریکی با توان خروجی 2000 W این کار چقدر به طول خواهد انجامید؟ با استفاده از فرمول دوم معادله دیگری را می نویسیم:

$$336{,}000 = 2000 \cdot t$$
$$t \approx 168\ s \approx 3\ minutes$$

مقدار m=1 kg آب (c=4200 ژول بر کیلوگرم درجه سانتیگراد) را در یک ظرف و m=1 kg ماسه (c=290 ژول بر کیلوگرم درجه سانتیگراد) را در ظرف دیگری کنار آن می گذاریم. این آزمایش شبیه یک ساحل مصنوعی است. با استفاده از اجاق الکتریکی مقدار 10000 ژول گرما به هریک از دو ظرف می دهیم. افزایش دماهای آب و ماسه چقدر خواهد بود؟

ابتدا آب را بررسی می کنیم. با استفاده از داده های ارایه شده و فرمول مربوطه، معادله ای تشکیل می شود:

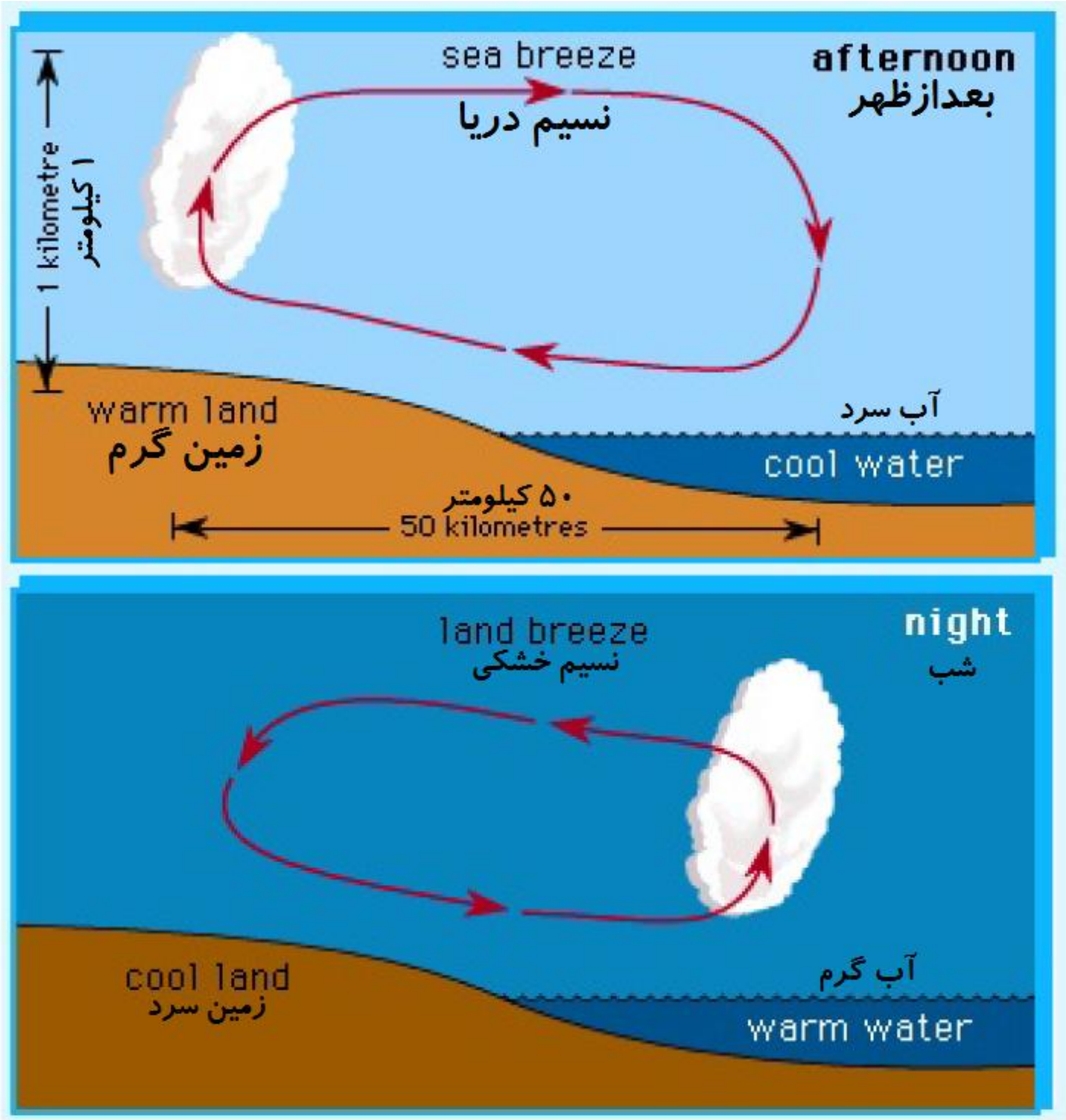
$$10{,}000 = 4200 \cdot 1 \cdot T$$
$$T \approx 2.4\ °C$$

بنابراین دمای آب به میزان 2.4 درجه سانتیگراد افزایش می یابد. دمای ماسه چطور؟ ماسه نیز به میزان 10000 ژول گرما دریافت می کند.

$$10{,}000 = 290 \cdot 1 \cdot T$$
$$T \approx 34.5\ °C$$

بنابراین ماسه (یا به طور کلی هر نوع خاکی) بسیار سریعتر از آب گرم می شود. به بیان دیگر: دمای زمین به ازای دریافت میزان مشخصی انرژی بسیار سریعتر از آب افزایش می یابد. این پدیده به خوبی توضیح می دهد که چرا تغییرات دمایی نزدیک دریاها و اقیانوسها بسیار ملایمتر از خشکیهای دور از سواحل دریا است، یعنی در تابستان دما کمتر گرم شده و در زمستانها کمتر سرد می شود. آب به نحو موثری تغییرات دمایی را کاهش می دهد.

این آزمایش همچنین پدیده نسیم دریا-ساحل (که در شکل زیر مشاهده می شود) را توضیح می دهد. در طول روز، انرژی خورشید سبب می شود که خشکی گرمتر از آب شود. هوای روی خشکی بالا رفته و سبب می شود که هوای خنکتر از سمت دریا به خشکی بِوَزَد. در شب، به دلیل فقدان وجود انرژی خورشید، شرایط معکوس است. خشکی سریعتر سرد شده و اکنون هوای روی دریا بالا می رود.

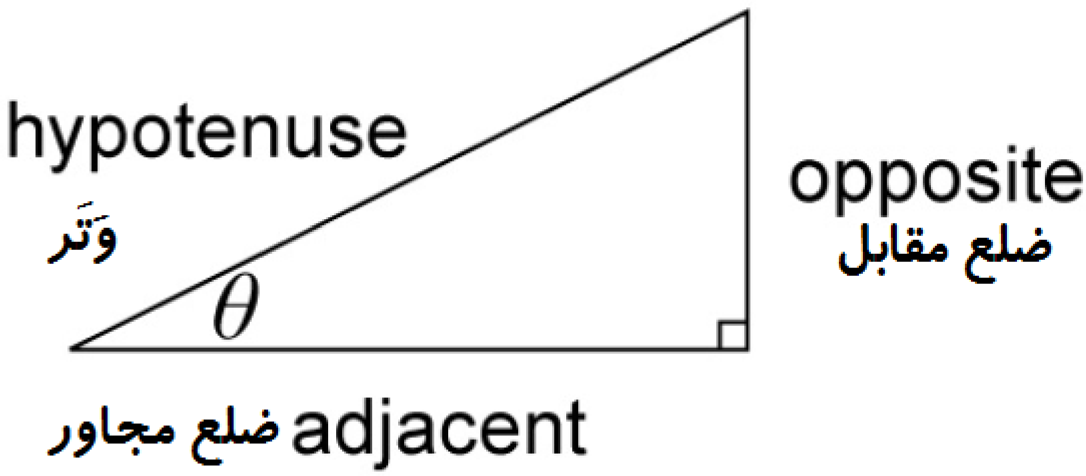


امیدوارم این فرمول برای شما نیز جذاب بوده باشد. این فرمول، ساده و سودمند است و در عین حال می تواند بسیاری از پدیده های فیزیکی را توضیح دهد. اکنون زمان آن فرا رسیده که مفهوم انرژی را کنار گذاشته و به دیگر موضوعات بپردازیم.

بخش دوم: ریاضیات

مثلثات

در هندسه شما عموما با مثلثهای قائم الزاویه سروکار خواهید داشت و اساسا نمی توان بدون دانستن برخی از روابط مثلثاتی سودمند، برخی از محاسبات را انجام داد. این فرمولها در واقع در جعبه ابزار فیزیکدانان و ریاضی دانان، به نوعی آچار فرانسه به شمار می روند که شما همواره برای حل مسایل به آنها نیاز پیدا می کنید.



در شکل بالا یک مثلث قائم الزاویه را مشاهده می کنید (مثلثی که یک زاویه ۹۰ درجه دارد). ضلع روبروی زاویه قائمه، وَتَر نامیده می شود که همواره بلندترین ضلع در مثلث است. زاویه دیگری به غیر از زاویه قائمه را انتخاب کرده و آن را با θ (برحسب درجه) مشخص می کنیم. ضلع مجاور این زاویه و ضلع مقابل آن را در نظر بگیرید.

فرمول مهم این بخش در واقع سه فرمول است. این فرمولها به ما این امکان را می دهند که با مشخص بودن دو کمیت، همه کمیتهای مثلث را محاسبه کنیم. اگر دو ضلع برای ما معلوم باشد، می توانیم ضلع سوم و زوایا را محاسبه کنیم. اگر زاویه و یک ضلع معلوم باشد، می توانیم طول دو ضلع دیگر را به دست آوریم. فرمولها به شرح زیر می باشند:

$\sin \theta =$ ضلع مقابل / وتر

$\cos \theta =$ ضلع مجاور / وتر

$\tan \theta =$ ضلع مقابل / ضلع مجاور

این که از کدام رابطه استفاده شود بستگی به این دارد که کمیتهای معلوم چه باشند. اگر ضلع مجاور و وتر داده شده باشند، مشخصا فرمول دوم باید مورد استفاده قرار گیرد. اگر زاویه θ و وتر داده شده باشند، می توانید بسته به اینکه چه پارامتری را می خواهید پیدا کنید، از فرمولهای اول یا دوم استفاده کنید.

یک هواپیما هنگام بلند شدن، زاویه مسیر θ برابر با 15 درجه را حفظ می کند. هنگام رسیدن به ارتفاع پرواز $h=11\ \text{km}$ چه مسافتی را پیموده است؟

برای تجسم بخشیدن به این مساله یک شکل کشیده و یا به شکل قبلی مراجعه کنید. در این حالت ارتفاع مشخصا ضلع مقابل زاویه داده شده است و مسافت پیموده شده، وتر است. این بدان معنی است که ما برای محاسباتمان به فرمول سینوس نیاز داریم.

$\sin \theta =$ **ضلع مقابل / وتر**

$$\sin 15^\circ = 11\ km / d$$
$$0.26 \approx 11\ km / d$$

در گام آخر ما از ماشین حساب برای برای برآورد $\sin 15^{\circ}$ استفاده کردیم. البته مطمئن شوید که ماشین حساب بر روی وضعیت «درجه» و نه «رادیان» تنظیم شده است، در غیر این صورت نتیجه نادرستی خواهید گرفت. اکنون معادله بالا را حل می کنیم:

$$d \cdot 0.26 \approx 11\ km$$
$$d \approx 42\ km$$

می خواهیم زاویه θ که در آن پرتوهای خورشید به زمین می تابند را تعیین کنیم. برای این کار، جعبه ای روی زمین قرار داده و ارتفاع و طول سایه آن را اندازه گیری می کنیم. مقادیر مربوطه عبارتند از $h=40$ cm و $l=15$ cm.

مجددا این مساله را با شکل بالا تجسم می کنیم. ارتفاع جعبه مشخصا ضلع مقابل و طول سایه ضلع مجاور است. بنابراین، در اینجا باید از فرمول تانژانت بهره گیریم.

tan θ = ضلع مقابل / ضلع مجاور

$$\tan \theta = 40 / 15 \approx 2.67$$

برای به دست آوردن زاویه از آن، ما باید از تابع معکوس در ماشین حساب استفاده کنیم. برای نمایش این تابع از پیشوند arc در معادلات استفاده می کنیم.

$$\theta = \arctan(2.67) \approx 69^\circ$$

با استفاده از این جعبه ما نشان دادیم که در این لحظه زاویه تابش پرتوهای خورشید به زمین برابر با زاویه $\theta=69^{\circ}$ است. اگر در همان زمان طول سایه یک ساختمان $l=8$ m باشد، ارتفاع h این ساختمان چقدر است؟

با مراجعه مجدد به شکل می بینیم که پارامترهای ضلع مقابل (ارتفاع) و ضلع مجاور زاویه (طول سایه) مطرح می باشند. بنابراین از فرمول تانژانت بهره می گیریم.

tan θ = ضلع مقابل / ضلع مجاور

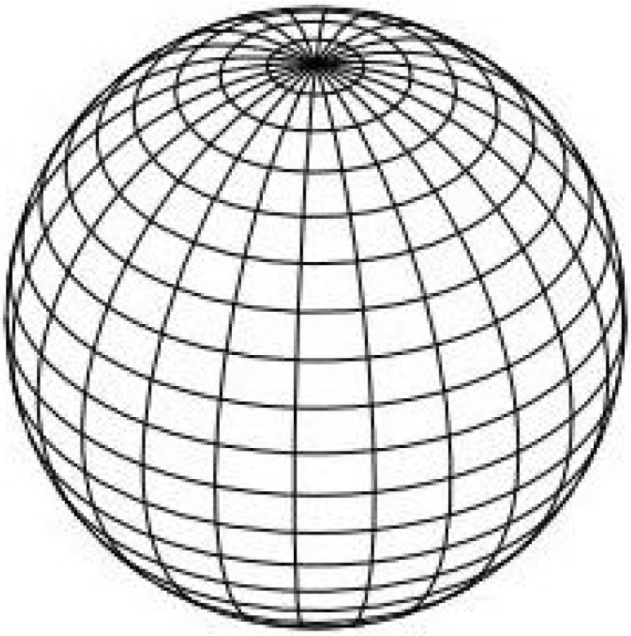
$$\tan 69^\circ = h / 8\ m$$
$$h = 8\ m \cdot \tan 69^\circ \approx 21\ m$$

اینها تنها چند نمونه از میلیونها کاربرد برای فرمولهای مثلثاتی است. در بسیاری از مسایل مرتبط با ریاضیات این فرمولها کاربرد دارند. خوشبختانه فهم و کاربرد آنها پیچیده نیست و با ترسیم یک تصویر ساده به راحتی قابل بررسی می باشند.

دایره ها

برای ریاضیدانها عدد π جذابیت بسیار زیادی دارد. اغلب ریاضیدانهای مشهور تلاش کرده اند تا روشی برای محاسبه دقیقتر آن بیابند و یا بر روی تحلیل ماهیت آن وقت صرف کرده اند. به بیان دیگر این عدد مرز میان ناحیه دنیای مصنوعات بشری با خطوط مستقیم و دنیای طبیعت با خطوط منحنی است. یکی از مهمترین کاربردهای این عدد، امکان پذیر نمودن محاسبات مربوط به دایره ها و اجسام کروی است.

دایره مجموعه ای دوبعدی از نقاط است که همگی فاصله ثابتی از یک مرکز دارند. این فاصله شعاع r (برحسب متر) نامیده می شود. تنها پارامتر ورودی مورد نیاز در اینجا همین شعاع است. کره نیز تعریفی مشابه دایره دارد، با این تفاوت که در فضای سه بعدی می باشد.



فرمولهای مهمی که در این بخش به آنها پرداخته می شود، به ما امکان محاسبه محیط دایره C (برحسب متر)، مساحت دایره A (برحسب متر مربع)، مساحت سطح کره S (برحسب متر مربع)، و حجم کره V (برحسب متر مکعب) را می دهد. می توان گفت که بدون این فرمولها انجام محاسبات هندسی عملا غیرممکن است.

$$\mathbf{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$$
$$\mathbf{A = \pi \cdot r^2}$$
$$\mathbf{S = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$
$$\mathbf{V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3}$$

اکنون به چند مثال درباره چگونگی کاربرد آنها می پردازیم.

شعاع زمین تقریبا برابر با r=6400 km است. برای یک بار پیمودن استوا به دور زمین چه مسافتی را باید طی کرد؟ این پرسش در واقع محاسبه محیط دایره استوایی را از ما می خواهد. با جایگذاری در فرمول داریم:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 6400\ km \approx 40{,}200\ km$$

با هواپیمایی که با سرعت 1000 کیلومتر بر ساعت حرکت می کند، این مسافت به میزان زمان زیر طول می کشد:

$$t = 40{,}200\ km\ /\ 1000\ km/h \approx 40\ h$$

چقدر طول می کشد تا با پای پیاده این مسافت را پیمود؟ سرعت متوسط پیاده روی معمولی برابر با حدود 5 کیلومتر بر ساعت است، اما از آنجا که ما نیاز به استراحت و خواب داریم، از سرعت متوسط 3 کیلومتر بر ساعت بهره می گیریم.

$$t = 40{,}200\ km\ /\ 3\ km/h \approx 13{,}400\ h \approx 560\ days$$

حدود ۳۰ درصد از سطح زمین را خشکی ها فرا گرفته است. کل مساحت خشکیهای زمین چقدر است؟ مجددا برای شعاع زمین مقدار r=6400 کیلومتر را درنظر می گیریم. طبق فرمول مساحت سطح کره زمین برابر است با:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot (6400\ km)^2 \approx 515\ million\ km^2$$

بنابراین کل مساحت خشکیهای زمین برابر با 155=515*0.3 میلیون کیلومتر مربع است. حدود نیمی از این مساحت قابل سکونت برای انسانها می باشد و از آنجا که حدود ۷ میلیارد نفر جمعیت کنونی انسانها بر روی زمین است، نتیجه می گیریم که مساحت زمین قابل سکونت به ازای هر نفر برابر با 0.011 کیلومتر مربع است. این مساحت مربوط به مربعی به ضلع 100 متر (330 فوت) است.

طبق قوانین فدراسیون بین المللی فوتبال (فیفا) توپ فوتبال باید محیطی برابر با حدود 70 سانتیمتر داشته باشد. شعاع و حجم این توپ چقدر است؟ فرمول مربوط به محیط را می نویسیم:

$$70\ cm = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$r = 70\ cm / (2 \cdot \pi) \approx 11\ cm$$

اکنون حجم را محاسبه می کنیم:

$$V = 4/3 \cdot \pi \cdot (11\ cm)^3 \approx 5580\ cm^3$$

می توان مثالهای زیادی از این دست را مطرح کرد. این فرمولها ساده و در عین حال بسیار پرکاربرد اند. می توانید در مسایلی که حاوی دایره یا کره است، از آنها بهره گیرید.

معادلات درجه دوم

این فرمول یکی از پرکاربردترین فرمولهای ریاضیات است. اگرچه اندکی طولانی و دشوار به نظر می رسد، اما اغلب افرادی که با ریاضیات سروکار دارند آن را از حفظ می دانند. درباره فرمول حل معادله درجه دوم صحبت می کنم.
ابتدا نگاهی به تعریف معادلات درجه دوم داشته باشیم. این معادله در کلی ترین حالت حاوی سه عبارت و سه عدد حقیقی a، b، و c است. همچنین مجهول x که می خواهیم آن را به دست بیاوریم نیز در معادله به چشم می خورد.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

عبارت نخست باید حتما وجود داشته باشد و نمی تواند ضریب آن صفر باشد. اما بقیه عبارتها می تواند گاهی وجود نداشته و ضرایب مربوط به آنها b و یا c صفر باشد.

$$3 \cdot x^2 - 48 = 0$$

در اینجا مقادیر ثابتها عبارتند از: a=3، b=0، و c=-48. توجه داشته باشید که علامت منفی بخشی از مقدار ثابت است. اگر آن را درنظر نگیرید، پاسخ نادرستی خواهید گرفت. اکنون به فرمول مهم این بخش بپردازیم. با جایگذاری مقادیر ثابتها در این فرمول، جوابهای معادله درجه دوم به دست می آید.

$$\mathbf{x = (- b \pm sq\ root\ (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)) / (2 \cdot a)}$$

این فرمول پیچیده به نظر می رسد و چرا در آن از علامت مثبت و منفی استفاده شده است؟ معادله درجه دوم عموما دو جواب دارد. جواب اول با علامت مثبت و جواب دوم با علامت منفی به دست می آید.
با یک مثال خواهید دید که این فرمول چندان هم پیچیده نیست. اگر مقادیر ثابت را درست وارد کنید و محاسبات را درست انجام دهید جوابهای خوبی خواهید گرفت.

می خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$$

مقادیر ثابتها عبارتند از: a=1، b=-6 و c=8. **آنها را در فرمول وارد می کنیم:**

$$x = (6 \pm \text{sq root} ((-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8)) / (2 \cdot 1)$$
$$x = (6 \pm \text{sq root} (4)) / 2$$
$$x = (6 \pm 2) / 2$$

بنابراین جواب نخست برابر است با:

$$x = (6 + 2) / 2 = 4$$

و جواب دوم نیز برابر است با:

$$x = (6 - 2) / 2 = 2$$

می بینید که کاربرد این فرمول چندان هم پیچیده نیست. البته باید در استخراج ثوابت از معادله و وارد کردن آنها در فرمول بسیار دقت کنید. استفاده از علامتهای نادرست یکی از مهمترین عوامل بروز اشتباه در حل معادله درجه دوم است و باید دقت کنید که چنین اشتباهی نمی کنید.

هنگامی که بر روی آسفالت خشک ترمز می گیرید، مسافت ترمزگیری شما d **(برحسب متر) بستگی به سرعت اولیه** v **(برحسب متر بر ثانیه) دارد به گونه ای که:**

$$d = v + v^2 / 16$$

برای اطلاعات بیشتر به بخش «مسافت ترمزگیری» مراجعه کنید. می خواهیم ببینیم در چه سرعتی مسافت ترمزگیری d=50 m **می شود. بنابراین به این معادله می رسیم:**

$$50 = v + v^2 / 16$$

ابتدا معادله را به شکل استاندارد معادله درجه دوم می نویسیم و برای حل آن از فرمول استفاده می کنیم.

$$v^2 / 16 + v - 50 = 0$$

مقادیر ثابت معادله عبارتند از: a=1/16، b=1 و c=-50.

$$v = (-1 \pm \text{sq root} (1^2 - 4 \cdot 1/16 \cdot (-50))) / (2 \cdot 1/16)$$
$$v = (-1 \pm \text{sq root} (13.5)) / 0.125$$
$$v \approx (-1 \pm 3.7) / 0.125$$

جواب نخست عبارت است از:

$$v \approx (-1 + 3.7) / 0.125 \approx 22 \text{ m/s} \approx 79 \text{ km/h} \approx 50 \text{ mph}$$

جواب دوم منفی است و در اینجا کاربردی ندارد. هنگام حل معادلات درجه دوم در مسایل فیزیک موارد زیادی وجود دارد که یکی از جوابها مفهوم نداشته و حذف می شود.

اگر به ریاضیات علاقمندید باید بتوانید معادلات درجه دوم را حل کنید. البته انواع دیگری از معادلات نیز وجود دارد که در بخش بعد به یکی دیگر از معادلات پرکاربرد ریاضی خواهیم پرداخت.

همانی لگاریتمی

برخی از فرمولها آنقدر مهم و سودمند اند که انجام محاسبات ریاضی بدون آنها غیرممکن است. همـانی لگـاریتمی یکـی از ایـن فرمولهـا مـی باشد. اگرچه این فرمول ساده است ولی می توان با آن معادلات نمایی را حل کرد. این معـادلات در مسـایل گونـاگونی ماننـد رشـد جمعیـت، رادیواکتیویته، آمار، بانکداری و ... آشکار می شوند. در شکل کلی، این معادلات به صورت زیر می باشند:

$$a^x = b$$

که در آن a و b مقادیر معلوم و x مجهولی است که می خواهیم آن را بیابیم. کلید حل این معادلات با یک رابطه لگاریتمی سـاده و در عـین حال توانمند به دست می آید:

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

ln عبارت اختصاری برای لگاریتم طبیعی است، تابعی که در همه ماشین حسابهای حرفه ای وجود دارد. با استفاده از تابع لگاریتم مـی تـوان نمای مجهول را به سادگی به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

ما مبلغ ۲۰ هزار دلار را با نرخ بهره سالیانه ۵ درصد در بانکی سپرده گذاری کرده ایم. چند سال طول می کشد تا این مبلغ به یـک میلیون دلار برسد؟ به زبان ریاضی این مساله به صورت زیر نوشته می شود:

$$20,000 \cdot 1.05^x = 1,000,000$$

که در آن x تعداد سالهای سپرده گذاری است. ابتدا معادله را به شکل استاندارد معادله نمایی در می آوریم:

$$1.05^x = 50$$

پس از اعمال لگاریتم طبیعی به طرفین معادله داریم:

$$\ln(1.05^x) = \ln(50)$$
$$x \cdot \ln(1.05) = \ln(50)$$

اکنون معادله به یک معادله خطی ساده تبدیل شده است:

$$x = \ln(50) / \ln(1.05)$$
$$x \approx 80$$ **سال**

بنابراین با سپرده گذاری و نرخ بهره مذکور، ما باید ۸۰ سال صبر کنیم تا میلیـونر شـویم. بـا اسـتفاده از تـابع لگـاریتمی، محاسـبه سالهای مذکور امکان پذیر شده است.

نوعی گیاه سبز که سطح دریاچه را می پوشاند در دریاچه ای کشف شده است. در زمان مشاهده، این گیاه 15 متر مربع از مسـاحت 8500 متر مربعی دریاچه را پوشانده است و دانشمندان نرخ رشد آن را برابر حدود ۸ درصد بـر هفتـه تعیـین کـرده انـد. چنانچـه معیار دیگری وجود نداشته باشد چند هفته طول می کشد تا این گیاه کل سطح دریاچه را بپوشاند؟

همانند مساله پیشین این مساله نیز به یک معادله نمایی تبدیل می شود و با تابع لگاریتمی می توان آن را حل کرد:

$$15 \cdot 1.08^x = 8500$$
$$1.08^x = 567$$
$$\ln(1.08^x) = \ln(567)$$

$$x \cdot \ln(1.08) = \ln(567)$$

با حل معادله خطی برحسب x داریم:

$$x = \ln(567) / \ln(1.08)$$

$x \approx 82$ weeks ≈ 21 **ماه**

همانگونه که مشاهده می کنید حل اینگونه معادلات همواره مشابه است. با استفاده از تابع لگاریتم می توان معادلات بسیار جالبی را حل کرد.

سریهای هارمونیک

این بخش را با نگاهی به سریهای هارمونیک آغاز می کنیم. نام این سری از کاربرد در آکوستیک و تُنهای آلات موسیقی گرفته شده است.
سریهای هارمونیک H(n) به صورت مجموع معکوس اعداد طبیعی تا عدد n تعریف می شود. به زبان ریاضی:

$$H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$$

برای مثال:

$$H(4) = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 \approx 2.08$$

تعریف آن به همین سادگی است. در ابتدا این مجموع مصنوعی به نظر می رسد، اما در تعداد چشمگیری از مسایل کاربردی واقعی آشکار می شود. بنابراین تعیین این مجموع می تواند بسیار سودمند باشد. محاسبه H(4) ساده است، اما برای H(100) یا H(1000) اینگونه نیست.
برای محاسبه H(1000) باید ۱۰۰۰ عدد را با هم جمع کنید که عملی نیست.
خوشبختانه یک فرمول تقریبی خوبی برای این کار وجود دارد. این فرمول هرچه عدد n بزرگتر باشد، برآورد دقیقتری می دهد. به لحاظ ریاضی ثابت شده که چنانچه n به سمت بی نهایت میل کند، این فرمول تقریبی به عدد دقیق همگرا می شود. این فرمول عبارت است از:

$$H(n) \approx \ln(n) + 0.58$$

مقدار 0.58 از گرد کردن ثابت اویلر-ماشرونی به دست آمده است. البته از آنجا که تنها می خواهیم تقریب بزنیم، نیازی به دقت بیشتر برای این عدد نیست.

تصور کنید که شما در حال جمع آوری استیکرها هستید و یک مجموعه کامل استیکر شامل N قطعه استیکر مختلف است. چند استیکر باید بخرید تا یک مجموعه تکمیل شود؟ ما تعداد خریدهای مورد نیاز را با P نشان می دهیم. جواب برابر است با:

$$P = N \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/N)$$

برای یک مجموعه بزرگ استیکرها، برآورد این عبارت، دشوار و زمانبر است. اکنون باید فرمول تقریبی را اعمال کرد:

$$P \approx N \cdot (\ln(N) + 0.58)$$

برای یک مجموعه N=50 استیکر، چه تعداد استیکر باید بخرید تا آن را کامل کنید:

$$P \approx 50 \cdot (\ln(50) + 0.58) \approx 225$$

می توان دریافت که سریهای هارمونیک بسیار کند رشد می کنند. به چند نمونه زیر توجه کنید:

$$\mathrm{H}(1000) \approx 7.5$$
$$\mathrm{H}(2000) \approx 8.2$$
$$\mathrm{H}(3000) \approx 8.6$$
$$\mathrm{H}(4000) \approx 8.9$$

حتی با وجود افزایش هزار واحد در پارامتر ورودی در هر گام، سری هارمونیک با نرخ کندتری رشد می کند. آیا این کاهش سرعت نرخ رشد موجب می شود که ما به یک عدد حدی برسیم و یا اینکه نتیجه ولی با سرعتی کاهنده به سمت بی نهایت میل می کند؟ به لحاظ ریاضی می توان ثابت کرد که حدی وجود ندارد و نتیجه به بی نهایت میل می کند.

سریهای هندسی

این سریها بسیار جالب و سودمند اند. در بخش پیشین دیدیم که سریهای هارمونیک همگرا نمی شوند، یعنی با افزایش عبارات سری، به یک مقدار حدی رشد نمی کنند. سری هارمونیک با رشد تعداد عبارات آن به بی نهایت، به سمت بی نهایت میل می کند که منطقی به نظر می رسد. البته ممکن است با افزایش تعداد عبارات، یک مجموع به سمت مقداری حدی میل کند که در سریهای هندسی چنین پدیده ای رخ می دهد.

پیش از بیان فرمول، به یک مثال بپردازیم. فرض کنید که می خواهیم این مجموع را محاسبه کنیم:

$$1 + (0.8) + (0.8)^2 + (0.8)^3 + \ldots$$

مجموع ۱۰ عبارت نخست برابر است با: 4.4631

مجموع ۲۰ عبارت نخست برابر است با: 4.9423

مجموع ۳۰ عبارت نخست برابر است با: 4.9938

مجموع ۴۰ عبارت نخست برابر است با: 4.9993

به نظر می رسد به جای افزایش مداوم و نامحدود، این مجموع به عدد محدود پنج میل می کند. با فرمول مربوط به سریهای هندسی نامتناهی می توانیم آن را اثبات کنیم. فرض کنید عدد مشخص x بین صفر و یک داده شده است. برای محاسبه مجموع هندسی می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1 / (1 - x)$$

در حالت $x=0.8$ داریم:

$$1 + (0.8) + (0.8)^2 + (0.8)^3 + \ldots = 1 / 0.2 = 5$$

که انتظار آن را هم داشتیم. اکنون ممکن است به نظر شما فرمول مجموع چنین سریهایی بی استفاده باشد. آیا اساسا کاربردهای واقعی برای این فرمول وجود دارد؟ بله، آن هم بسیار فراوان. همانند موضوع سریهای هارمونیک، سریهای هندسی نیز به نحو شگفت انگیزی در حل مسایل فیزیک یا ریاضیات آشکار می شوند. این یکی از فرمولهایی است که اغلب فیزیکدانان و ریاضیدانان به دلیل کاربرد مکرر، آن را از حفظ می دانند.

اکنون به چند مثال بپردازیم.

توپی را از ارتفاع ۱ متری رها می کنیم. پس هر اصابت، توپ به میزان ۶۰٪ ارتفاع پیشین خود به بالا می پرد. در مجموع، چه مسافتی را توپ طی می کند؟

پس از نخستین اصابت، توپ به ارتفاع 0.6 متر به بالا می جهد، پس از اصابت دوم، ارتفاع جهش برابر با $0.6*0.6=0.6^2$ متر است، پس از اصابت سوم، ارتفاع برابر با $0.6*0.6*0.6=0.6^3$ متر است، و به همین ترتیب الی آخر. بنابراین مسافت کل پیموده شده از رابطه زیر به دست می آید (توجه داشته باشید که ضریب ۲ به دلیل مجموع مسافت بالا و پایین رفتن توپ در یک جهش است، به غیر از نخستین سقوط):

$$d = 1 + 2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.6^2 + 2 \cdot 0.6^3 + \ldots$$

با فاکتورگیری $2*0.6$ رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$d = 1 + 2 \cdot 0.6 \cdot (1 + 0.6 + 0.6^2 + \ldots)$$

به طور مشخص، عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی با $x=0.6$ است. با استفاده از فرمول این بخش می توان آن را محاسبه کرد:

$$1 + 0.6 + 0.6^2 + \ldots = 1 / 0.4 = 2.5$$

بنابراین کل مسافت پیموده شده برابر است با:

$$d = 1 + 2 \cdot 0.6 \cdot 2.5 = 4\ m$$

برای یک بیمار دارای عفونت خوردن روزانه قرص حاوی 50 میلی گرم آنتی بیوتیک توصیه شده است. پس از یک روز، تنها 15 درصد از مقدار یک قرص در بدن باقی می ماند. چه مقدار آنتی بیوتیک در ازای مصرف درازمدت قرص در بدن می ماند؟

در روز دوم درمان، مقدار A آنتی بیوتیک در بدن برابر است با 50 میلی گرم مربوط به مصرف همان روز و $0.15*50$ میلی گرم مربوط به قرص روز قبل است:

$$A = 50 + 0.15 \cdot 50$$

روز سوم نیز ما 50 میلی گرم مربوط به همان روز، $0.15*50$ میلی گرم مربوط به روز قبل، و $0.15*0.15*50$ میلی گرم مربوط به روز نخست را خواهیم داشت:

$$A = 50 + 0.15 \cdot 50 + 0.15^2 \cdot 50$$

با ادامه این روند می توانیم نتیجه بگیریم که در مصرف درازمدت، مقدار آنتی بیوتیک برابر خواهد بود با:

$$A = 50 + 0.15 \cdot 50 + 0.15^2 \cdot 50 + 0.15^3 \cdot 50 + \ldots$$

$$= 50 \cdot (1 + 0.15 + 0.15^2 + 0.15^3 + \dots)$$

مجموع درون پرانتز یک سری هندسی نامتناهی با $x=0.15$ است که مقدار آن را از فرمول به دست می آوریم:

$$1 + 0.15 + 0.15^2 + 0.15^3 + \dots = 1 / 0.85 \approx 1.18$$

اکنون مقدار آن را در پرانتز اعمال می کنیم:

$$A \approx 50 \cdot 1.18 \approx 60$$

بنابراین در مصرف درازمدت 60 میلی گرم آنتی بیوتیک در بدن وجود خواهد داشت، 50 میلی گر مربوط به قرص همان روز و 10 میلی گرم مربوط به قرصهای روزهای پیشین.

آیا ...0.9999 برابر با 1 است؟ ممکن است با بحث و مجادله نتوان چنین چیزی را بررسی نمود، اما به جای آن، این عدد را محاسبه می کنیم. توجه کنید که عدد ...0.9999 را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$0.999\ldots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$$
$$= 9/10 + 9/100 + 9/1000 + 9/10000 + \dots$$
$$= 9/10 \cdot (1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots)$$
$$= 9/10 \cdot (1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^3 + \dots)$$

همانگونه که مشاهده می کنید، عبارت درون پرانتز یک سری هندسی نامتناهی با $x=1/10$ است. این مجموع را محاسبه می کنیم:

$$1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^3 + \dots$$
$$= 1 / (1 - 1/10) = 1 / (9/10) = 10/9$$

با وارد کردن این مقدار به درون پرانتز داریم:

$$0.999\ldots = 9/10 \cdot 10/9 = 1$$

اثبات تمام است. عدد ...0.9999 قطعا و بدون تردید با 1 برابر است. ریاضیات محض نیز می تواند بسیار جذاب باشد.

امیدوارم این مثالها در درک چگونگی پیدایش سریهای هندسی و نحوه محاسبه سریع آنها سودمند بوده باشد. اهمیت و کاربرد این فرمول و سریهای هندسی را دست کم نگیرید. در کاربردهای بسیار متعدد و جالبی آشکار می شوند. به عنوان مطلب آخر این بخش، اثبات ساده و جذاب این فرمول را ببینیم:

$$s = 1 + x + x^2 + \dots$$
$$x \cdot s = x + x^2 + x^3 + \dots$$
$$s - x \cdot s = 1 + x + x^2 + \dots - x - x^2 - x^3 - \dots = 1$$
$$s \cdot (1 - x) = 1$$
$$s = 1 / (1 - x)$$

توزیع پواسون

توزیع پواسون یک توزیع احتمالاتی گسسته، مشابه با توزیع دو جمله ای است. البته تفاوت بزرگ آن این است که به جای داشتن احتمالات به عنوان ورودی، ما نرخ متوسط رخ دادن یک رویداد مشخص را داریم. به عنوان مثال، به جای آنکه شانس گل زدن در یک بازی مشخص باشد، تعداد متوسط گلهای بازی معلوم است. این روش، تحلیل برخی از مسایل را بسیار ساده تر می کند.
فرض کنید که از مشاهده پیشینه یک تیم فوتبال می دانیم که نرخ متوسط 2.4 گل به ازای هر بازی رخ داده است. اکنون می خواهیم بدانیم که در یک بازی خاص احتمال آنکه هیچ گلی زده نشود چقدر است. با استفاده از توزیع پواسون می توان به طور مستقیم به این پرسش (و پرسشهای دیگری از این دست) پاسخ داد:

p(بدون گل) =9 %

فرمول کلی برای حل چنین مسایلی به این شرح است. نرخ متوسط λ که در آن رویدادی در بازه زمانی خاص رخ می دهد (مانند تعداد گلها در هر بازی، تعداد تصادفات در هر سال، تعداد نامه ها در هر روز و غیره) مشخص است. اگر رخ دادن رویداد تصادفی باشد و مستقل از هر رویداد پیشین خود باشد، می توانیم از این فرمول برای محاسبه آنکه این رویداد در بازه زمانی مشخصی رخ دهد استفاده کنیم:

$$\mathbf{p(k\ occurrences) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!}$$

علامت تعجب که در فرمول استفاده شده مربوط به تابع فاکتوریل می باشد. این تابع برابر است با حاصلضرب همه اعداد طبیعی از یک تا همان عدد کنار علامت تعجب. برای مثال: 3!=1*2*3=6 یا 5!=1*2*3*4*5=120. البته 0! طبق تعریف برابر با 1 می باشد.

به مثال بیان شده در مقدمه برمی گردیم، می خواهیم بدانیم احتمال آنکه k=0 گل در بازی رخ دهد چقدر است. نرخ متوسط گلزنی به ازای هر بازی برابر با λ=2.4 گل است.

$$p(no\ goal) = e^{-2.4} \cdot 2.4^0 / 0! = 0.09 = 9\ \%$$

آمار نشان می دهد که در ایالت نیویورک آمریکا به طور متوسط سالی پنج گردباد رخ می دهد. احتمال آنکه در یک سال معین تنها دو گردباد رخ دهد چقدر است؟ احتمال آنکه بیش از پنج گردباد رخ دهد چقدر است؟
ابتدا به پرسش نخست می پردازیم. ورودیهای مورد نیاز برای توزیع پواسون، نرخ متوسط است که در این مساله برابر است با λ=5، و تعداد رخدادها، که در این حالت برابر است با k=2. با وارد کردن این مقادیر در فرمول داریم:

$$p(2\ tornadoes) = e^{-5} \cdot 5^2 / 2! = 8.4\ \%$$

بنابراین احتمال تشکیل تنها دو گردباد در یک سال حدودا برابر با یک دوازدهم است. این بخش ساده تر مساله بود. احتمال رخ دادن بیش از پنج گردباد چقدر است؟ از آنجا که توزیع پواسون نامتناهی است، نباید تلاش کنیم این مجموع را حساب کنیم:

$$p(6\ tornadoes) + p(7\ tornadoes) + p(8\ tornadoes) + \ldots$$

روش بهتر، محاسبه احتمال رخ دادن پنج گردباد یا کمتر است. عددی که به دست می آید چنانچه از یک کم شود برابر با احتمال رخ دادن بیش از پنج گردباد می باشد. برای محاسبه رخ دادن پنج گردباد یا کمتر کافی است احتمالهای رخ دادن صفر گردباد، یک گردباد، و تا پنج گردباد را با هم جمع کنیم:

$$p(no\ tornado) = e^{-5} \cdot 5^0 / 0! = 0.007$$
$$p(1\ tornado) = e^{-5} \cdot 5^1 / 1! = 0.034$$

با ادامه این روند تا پنج و مجموع آنها برابر می شود با:

$$p(5\ or\ less\ tornadoes) = 0.616$$

از آنجا که مجموع احتمال رخ دادن پنج گردباد یا کمتر و احتمال بیش از پنج گردباد برابر با یک می باشد، به سادگی می توان نتیجه مطلوب را به دست آورد:

$$p(\text{more than 5 tornadoes}) = 0.384 = 38.4\ \%$$

می توانید ماشین حسابهایی را بر روی اینترنت بیابید که همه این محاسبات را برای شما انجام می دهد. نمونه آن «ماشین حساب توزیع پواسون استات ترِک» است که کار کردن با آن ساده است و احتمالات تجمعی را نشان می دهد.

بخش سوم: اقتصاد

تورم

قابل انکار نیست که اجناس همواره در حال گران شدن می باشند. این پدیده در تمامی اقتصادها و تقریبا هر ساله رخ مـی دهـد. در نرخهـای پایین تورم این افزایش سطح قیمتها شاید چندان محسوس نباشد. تصویر زیر نرخ تورم ایالات متحده آمریکا را از سال ۱۹۹۱ تا ۲۰۱۲ نشـان می دهد. تنها در سال ۲۰۰۹، اندکی پس از بحران اقتصادی، قیمتها کاهش پیدا کرده است.

دلیل وقوع تورم چیست؟ یکی از راههای پاسخ به این پرسش استفاده از رویکرد پولی و تمرکز بر معادله تبادل است. این بحث به مـا در فهـم موضوع کمک می کند.

با استفاده از یک مثال به صورت گام به گام نگاهی به کمیتهای لازم برای فهم این معادله می اندازیم. یک کمیت، منبع پـول M یـا بـه طـور ساده، کل مقدار پول موجود در اقتصاد است. برای درک مطلب، این مقدار را برابر با ۱۰۰ میلیارد دلار فرض می کنیم.

سرعت پول V نیز مهم است. این پارامتر به ما می گوید که طی یک سال هر دلار چند بار استفاده می شود. این کمیت به عادتهای پس انـداز مردم در اقتصاد بر می گردد. اگر ما علاقمند به پس انداز کردن باشیم، دلار سالانه کمتر دست به دسـت شـده و V کوچـک اسـت. از سـوی دیگر، اگر مردم به خرج کردن پول علاقمند باشند، دلار صاحبان زیادی را می بیند و V بزرگ است. برای مثال، V=5 در نظر می گیریم.

توجه داشته باشید که حاصلضرب این دو پارامتر بیانگر کل خرج کردن در اقتصاد است. اگـر M برابـر بـا ۱۰۰ میلیـارد دلار بـوده و هـر دلار V=5 بار در سال خرج شود، کل خرج کردن سالیانه برابر با ۵۰۰ میلیارد دلار خواهد بود. این نکته در فهم معادله تبادل ضروری است.

دو کمیت دیگر را نیز باید بررسی کنیم، یکی از آنها سطح قیمت P است. این پارامتر بیانگر قیمت متوسط کـالا در اقتصـاد اسـت. اگـر تـورم وجود داشته باشد این کمیت افزایش خواهد یافت. فرض کنید که در اقتصاد فرضی ما قیمت متوسط برابر با $ P=25 است.

پارامتر آخر، تعداد تراکنشها T است که همان تعداد کل کالاهای فروخته شده در طی یـک سـال اسـت. ایـن مقـدار را فعـلا برابـر T=200 میلیارد درنظر می گیریم و نتیجه بسیار مهم دیگری می گیریم.

حاصلضرب این دو کمیت اخیر برابر با کل درآمد حاصل از فروش در اقتصاد است. اگر بهای متوسط کالا برابـر بـا $ P=25 باشـد و T=200 میلیارد کالا در سال فروخته شود، کل درآمد حاصل از فروش برابر است با P*T=500 میلیـارد دلار. ایـن تصـادفی نیسـت کـه کـل درآمـد حاصل از فروش با کل مبلغ خرج کردن با هم برابر باشد. به عبارتی، این برابری مبنای (منطقی) «معادله تبادل» است.

برای آنکه کل مبلغ خرج کردن با کل مبلغ حاصل از فروش با هم برابر باشد، این معادله باید برقرار باشد:

$$\mathbf{M \cdot V = P \cdot T}$$

که همان «معادله تبادل» است. اکنون تصور کنید اگر ما منبع پول M در اقتصاد را افزایش دهیم، به طور مثال با چاپ پول یـا خـرج کـردن پول توسط حاکمیت، آنگاه چه رخ خواهد داد. فرض کنید که عادتهای خرج کردن مردم تغییر نکند (V ثابت). بنابراین با افزایش سمت چـپ معادله، کل خرج کردن، سمت راست معادله، کل درآمد فروش نیز باید افزایش یابد.

یک راه برای آنکه چنین چیزی رخ دهد آن است که سطح قیمتها P افزایش یابد (تورم). مشاهدات تجربی نشان می دهد که هرگاه در ایالات متحده آمریکا منبع پول افزایش یابد، پس از آن تورم رخ می دهد.

خوشبختانه کمیت دیگری نیز در سمت راست معادله است که می تواند بخشی از رشد منبع پول را جذب کند. با افزایش تعـداد تراکنشـهای T (افزایش فعالیت اقتصادی) که با رشد منبع پول همراه باشد، تورم را مهار خواهد کرد. از سوی دیگر، ترکیب پول بیشتر و فعالیت اقتصـادی کمتر می تواند به تورم خطرناک و شدید مدل ویمار منجر شود.

ممکن است گاهی با خود فکر کرده باشید که چرا حاکمیت، پول چاپ نمی کند تا همه میلیونر شوند؟ اکنون پاسخ این پرسـش روشـن شـد: علت آن «معادله تبادل» است. اگر حاکمیت مانند دیوانه ها شروع به چاپ پول کند، افزایش سطح پول به قدری شدید مـی شـود کـه ثـروت

ظاهری ایجاد شده را خواهد بلعید. اسکناسهای دلار سه صفر به خود می گیرد، اما شما نمی توانید چیزی بیش از آنکه قبلا می خریدید بخرید.

البته به غیر از رشد منبع پول، دلایل کم اهمیت تر و متعدد دیگری نیز وجود دارد. قیمتها با تعادل عرضه و تقاضا تعیین می شود. اگر تقاضا کاهش یابد، فروشندگان برای فروختن کالاهای خود قیمتها را پایین می آورند. به طور مشابه، اگر تقاضا ناگهان افزایش یابد، فروشندگان می توانند قیمتهای بالاتری را بر روی کالاهای خود بگذارند و تورم ایجاد می شود. به طور مثال، هنگامی که یک فناوری جدید آشکار می شود و به سرعت فراگیر می شود، این پدیده رخ می دهد. این نوع رشد سطح قیمتها را تورم کشش تقاضا می نامند.

زمان دو برابر شدن / نیمه عمر

در بسیاری از مواقع ما با کمیتهایی سروکار داریم که به صورت نمایی رشد می کنند. این بدان معنی است که با گذشت هر سال (یا ماه، هفته و ...) این کمیت به مقدار درصد ثابتی تغییر می کند. نمونه ای از این موضوع، بهره مرکب است. اگر شما مبلغ ۱۰ هزار دلار در بانکی با نرخ بهره ۵٪ سپرده گذاری کنید، پس از گذشت t سال، مقدار پول شما در بانک برابر با مقدار زیر است:

$$M = 10{,}000 \cdot 1.05^t$$

مثال دیگر آن، تجزیه رادیواکتیو است. اگر ۱۰۰ گرم ماده رادیواکتیو داشته باشید که سالانه ۲٪ از آن تجزیه می شود، جرم باقیمانده پس از گذشت t سال برابر است با:

$$m = 100 \cdot 0.98^t$$

این نشان می دهد که شما می توانید فرمولی برای آتی یک کمیت به صورت زیر بیان کنید:

$$F = I \cdot (1+p)^t$$

که در آن F مقدار آتی کمیت پس از گذشت t سال است، I مقدار اولیه کمیت و p درصد تغییر بیان شده بر حسب اعداد اعشاری است. زمانی که کمیت در حال رشد باشد مقدار p مثبت است و زمانی در حال کاهش باشد، p منفی است. این موضوع را اگر به خاطر بسپارید برای حل بسیاری از مسایل موثر خواهد بود.

یکی از مشخصه های رشد یا افت نمایی آن است که زمان لازم برای دو برابر شدن یا نصف شدن، ثابت است. اگر این کمیت در عرض ده سال دو برابر شود، مجددا در عرض ده سال بعد هم دو برابر خواهد شد و الی آخر. این زمان دو برابر شدن (یا نیمه عمر در حالت کاهش) را می توان با استفاده از این فرمول به سادگی محاسبه کرد:

$$\mathbf{T = \ln(2) / \ln(1+p)}$$

توجه داشته باشید که زمان دو برابر شدن (یا نصف شدن) به هیچ وجه به مقدار اولیه وابسته نیست. تنها درصد تغییر در این فرمول تاثیرگذار است. زمان دو برابر شدن همان واحدی را دارد که زمان مربوط به درصد تغییر بیان می شود. برای مثال، اگر کمیتی ماهانه ۴٪ رشد کند و در این فرمول آن را وارد کنیم، زمان دو برابر شدن به دست آمده برحسب ماه خواهد بود. همچنین به خاطر داشته باشید که درصد را به صورت عدد اعشاری وارد کنید.

نرخ تورم سالیانه در کشورهای صنعتی نوعا برابر با حدود $p=3\%=0.03$ است. اگر این نرخ ثابت بماند، چه مدتی طول می کشد تا قیمتها دو برابر شود؟ می توانیم به پرسش به سادگی و به سرعت پاسخ دهیم:

$$T = \ln(2) / \ln(1.03) \approx 23 \textit{ years}$$

که مربوط به حدود یک نسل است. در انتهای جنگ جهانی اول نرخ تورم در آمریکا به حدود $p=20\%=0.2$ افزایش یافت. زمان دو برابر شدن مربوطه چقدر است؟

$$T = \ln(2) / \ln(1.2) \approx 4\ years$$

در سال ۲۰۱۲ جمعیت جهان برابر با هفت میلیارد نفر بوده و با نرخ 1.1% در سال رشد مـی کنـد. مطـابق بـا روش بیـان شـده در ابتدای این بخش، پس از گذشت t سال دیگر انتظار داریم تعداد P نفر بر روی زمین زندگی کنند:

$$P = 7 \cdot 1.011^{t}$$

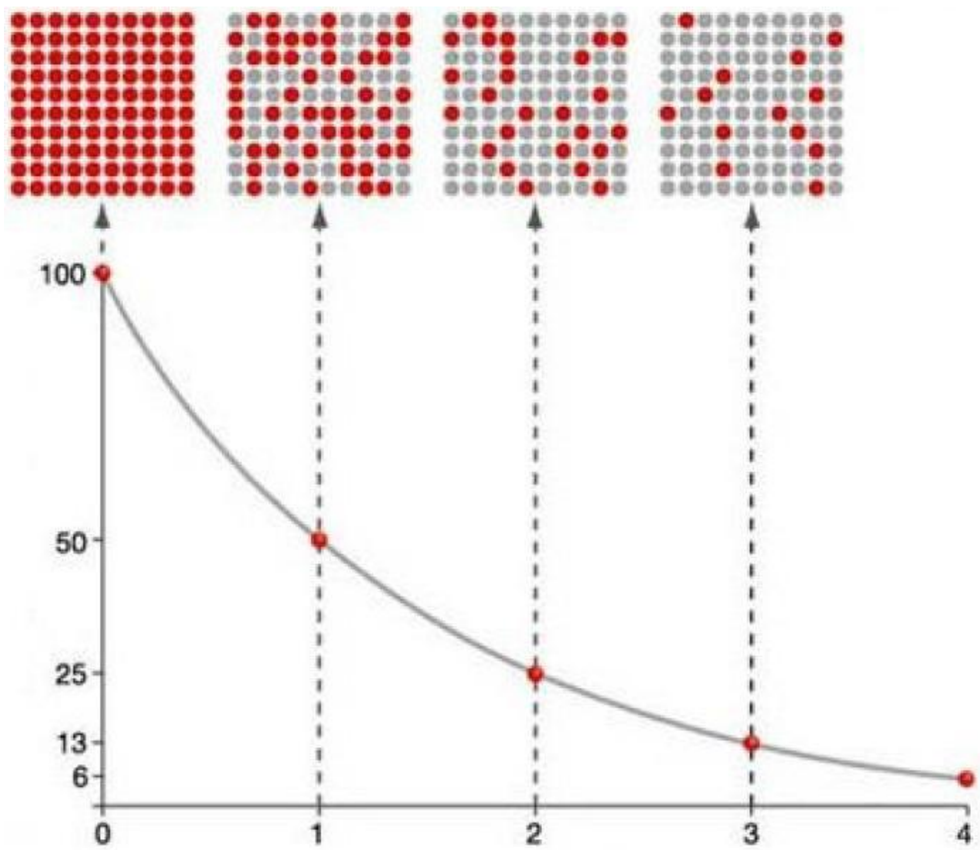
اگر همین نرخ رشد ادامه پیدا کند چقدر طول می کشد تا نسل بشر دو برابر شود؟ طبق فرمول داریم:

$$T = \ln(2) / \ln(1.011) \approx 63\ years$$

بنابراین در سال ۲۰۷۵ تعداد ۱۴ میلیارد نفر بر روی زمین زندگی می کنند. البته، نرخ رشد سالیانه جمعیت طی شصت سـال اخیـر رو به کاهش بوده و انتظار می رود در آینده نیز اینگونه باشد. در سال ۱۹۶۳ نرخ رشد سالیانه به مقـدار بیشـینه 2.2% رسـید کـه زمان دو برابر شدن مربوط به آن برابر است با:

$$T = \ln(2) / \ln(1.022) \approx 32\ years$$

خبر خوش برای همه آنهایی که زنده اند یا بعدا متولد خواهند شد، رشد انفجاری جمعیت در حال ملایـم شـدن اسـت. بنـابراین در درازمدت جمعیت به جای رشد نمایی، به صورت منطقی رشد خواهد کرد.



ماده رادیواکتیو پلوتونیوم-۲۱۰ با نرخ حدود 3.5% بر هفته تجزیه می شود. نیمه عمر این ماده چقدر است؟

$$T = \ln(2) / \ln(1.035) \approx 20\ weeks$$

بنابراین اگر در ابتدا یک نمونه ۱۶۰ گرمی پلوتونیوم-۲۱۰ داشته باشید، ...

پس از گذشته ۲۰ هفته ۸۰ گرم باقی می ماند

پس از گذشته ۴۰ هفته ۴۰ گرم باقی می ماند

پس از گذشته ۶۰ هفته ۲۰ گرم باقی می ماند

پس از گذشته ۸۰ هفته ۱۰ گرم باقی می ماند

و به همین ترتیب ادامه می یابد. اما این ماده چه می شود؟ بخشی از آن به جریانی از ذرات آلفا و الکترونها و بخشی از آن به تابش تبدیل می شود، که همه آنها برای افرادی که در معرض این تجزیه رادیواکتیو قرار می گیرند می تواند خطرناک باشد.

بنابراین زمان دو برابر شدن و یا نیمه عمر مفهوم مهمی است که محاسبه آن ساده است و برای موارد رشد نمایی (که بسیار فراوان اند) کاربرد دارد.

بهای بهینه

انتخاب بهای یک محصول هیچگاه ساده نیست. اگر قیمت پایین باشد، نرخ فروش افزایش می یابد ولی سود آن اندک است زیرا حاشیه سود برای هر فروش بسیار پایین است. از سوی دیگر چنانچه برای افزایش حاشیه سود، قیمت را بالا ببرید باز هیچ سودی به دست نمی آورید زیرا افراد رغبتی به خرید محصول شما نخواهند داشت و به رقیبتان مراجعه می کنند. چه باید کرد؟

مانند همیشه، میانه روی بهترین گزینه است. فرض کنید که نرخ فروش x به صورت خطی با بهای p کاهش می یابد، بهای بهینه p(opt) وجود دارد که بیشترین سود ممکن را فراهم می کند. خبر خوش آنکه فرمول ساده ای برای محاسبه بهای بهینه وجود دارد. خبر بد هم اینکه شما دست کم به دو نقطه داده برای استفاده از آن نیاز دارید و این فرمول همچنان تقریبی است.

اما اجازه دهید تا گام به گام پیش برویم. شما مدتی است که محصولتان را می فروشید و بهای کنونی آن برابر با p است. طی این مدت، نرخ فروش کم و بیش در مقدار x ثابت است. از آنجا که احساس می کنید که اوضاع باید بهتر شود، بها را به مقدار جدید p' افزایش یا کاهش می دهید و واکنش بازار را بررسی می کنید. نرخ فروش به x' تغییر می کند. با استفاده از این دو نقطه داده می توان بهای بهینه را محاسبه کرد.

پیش از بررسی کردن فرمول، خوب است دو کمیت دیگر را که به آسانی می توان از دو نقطه داده ها به دست آورد را تعریف کنیم. کمیت نخست، درصد تغییر در قیمت از p به p' است:

$$\sigma(\text{price}) = (p' - p) / p$$

کمیت دوم، درصد تغییر نرخ فروش از x به x' است:

$$\sigma(\text{sales}) = (x' - x) / x$$

توجه داشته باشید که علامتهای این کمیت معمولا برعکس یکدیگر است. اگر قیمت را افزایش دهیم، σ(price) مثبت، نرخ فروش معمولا کاهش می یابد، σ(sales) منفی. مطمئن شوید که علامتها را درست قرار داده اید، در غیر این صورت فرمول بهای بهینه نادرستی به شما می دهد. فرمول اصلی به شرح زیر است:

$$\mathbf{p(opt) = 0.5 \cdot p \cdot (1 - \sigma(price) / \sigma(sales))}$$

همچنین می توانیم بیشینه درآمد ناشی از فروش را با استفاده از این فرمول به دست آوریم:

$$\mathbf{r(max) = - p(opt)^2 \cdot (x' - x) / (p' - p)}$$

اکنون به بررسی یک مثال می پردازیم.

یک شرکت تولیدی که حافظه هارد بیرونی تولید کرده و می فروشد، در بهای p=60$ نرخ فروش x=1350 هارد بر ماه و در بهای p'=80$، نرخ فروش x'=1050 هارد بر ماه داشته است. بهای بهینه و بیشینه درآمد حاصل از فروش را برآورد کنید.

ابتدا درصد تغییرات را محاسبه می کنیم:

$$\sigma(price) = (80 - 60) / 60 = 0.33 = 33\ \%$$
$$\sigma(sales) = (1050 - 1350) / 1350 = -0.22 = -22\ \%$$

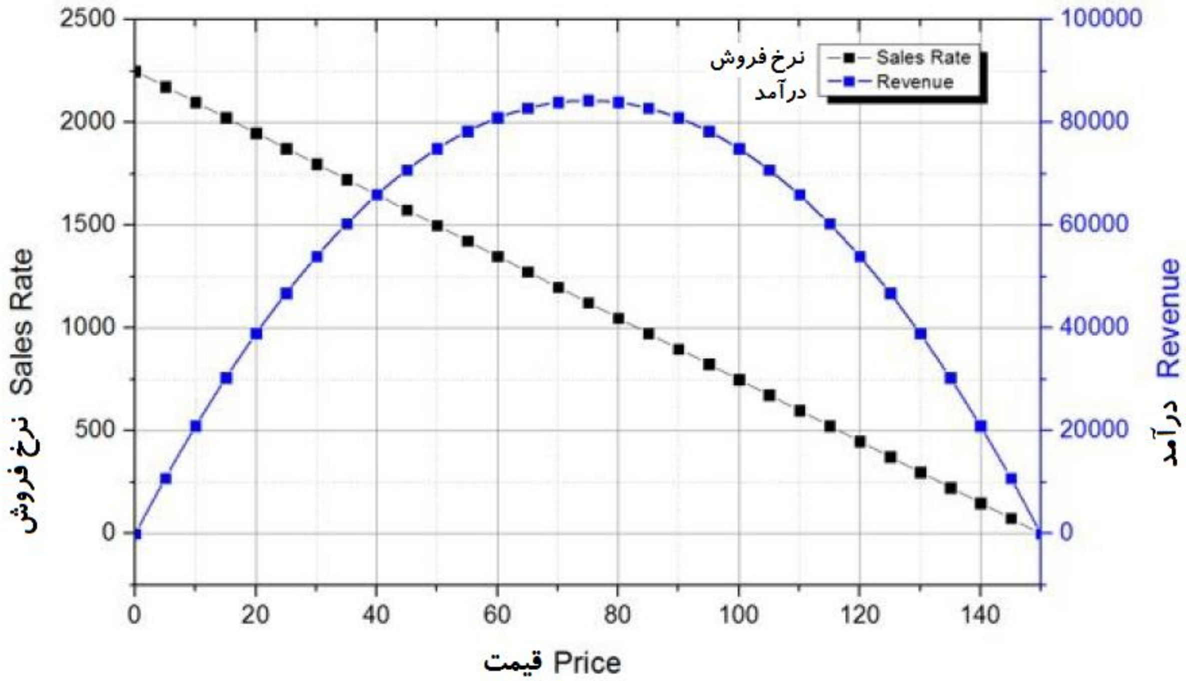
بنابراین شرکت قیمت را به میزان ۳۳٪ افزایش داده و در واکنش به آن، نرخ فروش ۲۲٪ کاهش یافته است. اکنون می توانیم از فرمول برای محاسبه بهای بهینه استفاده کنیم:

$$p(opt) = 0.5 \cdot 60\ \$ \cdot (\ 1 - 0.33 / (-0.22)\ )$$
$$p(opt) = 75\ \$$$

بنابراین با فرض خطی بودن ارتباط میان قیمت و نرخ فروش، بهای بهینه برای محصول برابر با ۷۵ دلار است. در این قیمت شرکت بیشترین درآمد حاصل از فروش را خواهد داشت:

$$r(max) = -75^2 \cdot (1050 - 1350) / (80 - 60)$$
$$r(max) \approx 84{,}400\ \$\ per\ month$$

این البته بدان معنی است که در بهای بهینه، شرکت تعداد $r(max) / p(opt) = 1130$ هارد را ماهیانه می فروشد. در شکل زیر می توانید تغییرات تئوری نرخ فروش و درآمد را نسبت به قیمت برای این محصول مشاهده کنید:



توجه داشته باشید که نسبت σ(price) / σ(sales) تعیین می کند که چگونه بهای بهینه p(opt) با بهای انتخاب شده اولیه p ارتباط دارد. اگر درصد تغییرات قیمت بیشتر باشد آنگاه درصد تغییرات نرخ فروش و بهای بهینه بیش از بهای اولیه خواهد بود (چنانچه در مثال نیز همین گونه بود). اگر هر دو درصد تغییر با هم برابر باشد، بهای بهینه با بهای اولیه برابر است.

آیا شما هم محصولی برای فروش دارید؟ اگر پاسخ مثبت است، ایده خوبی است تا نرخ فروش را در دو سطح قیمت متفاوت بررسی کنید و از این فرمول استفاده کنید. فرصت خوبی تا درآمد و سودتان را افزایش دهید.

اقساط وام

هنگامی که به طور مثال برای خرید خودرو یا مسکن، مقدار زیادی پول از بانک وام می گیرید معمولا باید به صورت ماهیانه اقساط آن را بپردازید. این اقساط شامل بهره وام نیز می باشد. در این بخش، فرمول مربوط به محاسبه اقساط ماهیانه ارایه شده است.

به چه ورودیهایی نیاز داریم؟ مشخصا ما به مقدار مبلغ وام P و نرخ بهره i (که برحسب اعشار بیان می شود) نیاز داریم. به علاوه، کل مدت زمان وام t (برحسب سال) نیز مورد نیاز است. با استفاده از این مقادیر می توان اقساط وام A را که برای یک سال است محاسبه کرد.

$$\mathbf{A = P \cdot i \cdot (1 + i)^t / ((1 + i)^t - 1)}$$

کافی است مبلغ قسط را بر عدد دوازده تقسیم کنیم تا قسط ماهیانه به دست آید. توجه داشته باشید که مقدار واقعی بسته به کارمزدها و شرایط خاص ممکن است چند درصد بالاتر یا پایینتر باشد.

موافقم، این فرمول خیلی جذاب به نظر نمی رسد، ولی از آن نهراسید. اگر مقادیر ورودیها را درست وارد کنید و با دقت محاسبات را انجام دهید نتیجه درستی خواهید گرفت. این فرمول یکی از پرکاربردترین فرمولها در بانکداری است و تقریبا همه ما در مقطعی از زندگی با آن سروکار خواهیم داشت.

می خواهیم مبلغ P=200000 دلار از بانک وام گرفته و طی t=20 سال آینده آن را بازپس دهیم. بانک پذیرفته تا این مبلغ را با نرخ بهره i=4%=0.04 به ما وام دهد. اقساط ماهیانه آن چقدر خواهد بود؟ برای محاسبه آن کافی است به سادگی همه مقادیر معلوم را در فرمول فوق قرار دهیم:

$$A = 200{,}000 \cdot 0.04 \cdot 1.04^{20} / (1.04^{20} - 1)$$
$$\approx 17{,}529 / 1.19 \approx 14{,}730\ \$$$

بنابراین اقساط ماهیانه برابر با 14730$ / 12=1230$ خواهد بود.

مقدار اقساط ماهیانه محاسبه شده برای ما زیاد است. می خواهیم مبلغ اقساط را با افزایش دور بازپرداخت وام به t=30 سال کاهش دهیم. بانک می پذیرد. چگونه این موضوع بر اقساط ماهیانه تاثیر می گذارد؟

$$A = 200{,}000 \cdot 0.04 \cdot 1.04^{30} / (1.04^{30} - 1)$$
$$\approx 25{,}947 / 2.24 \approx 11{,}580\ \$$$

که برابر با اقساط ماهیانه 965 دلار است. بنابراین ده سال بازپرداخت بیشتر موجب کاهش اقساط به میزان ۲۰ درصد شده است. آیا ارزش دارد یا نه؟ بستگی به نظر شما دارد.

فرمول اقساط ماهیانه یک وارون بسیار سودمند نیز دارد. گاهی شما می دانید که توانایی بازپرداخت چه مبلغ اقساط ماهیانه (و بالتبع سالیانه A) را دارید. با مشخص بودن مبلغ وام P و نرخ بهره i، آنگاه می توانیم دوره بازپرداخت t وام را محاسبه کنیم. برای این کار ابتدا این کمیت را محاسبه می کنیم:

$$x = A/S - i$$

و نتیجه را در این معادله وارد می کنیم:

$$\mathbf{t = \ln(1 + i / x) / \ln(1 + i)}$$

به همان مثال پیشین برگردیم. اگر می خواهیم اقساط ماهیانه برابر با 1100 دلار باشد، مدت زمان بازپرداخت وام چقدر خواهد بود؟ توجه داشته باشید که اقساط سالیانه برابر با 1100$*12=13200$ است.

ابتدا پارامتر x را محاسبه می کنیم:

$$x = 13,200 / 200,000 - 0.04 \approx 0.026$$

و در فرمول جایگذاری می کنیم:

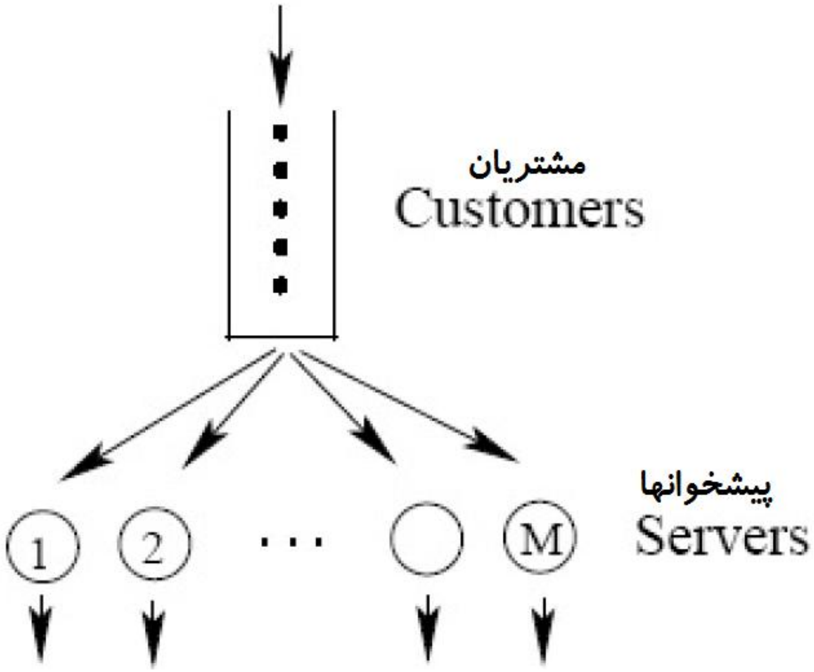
$$t = \ln(1 + 0.04 / 0.026) / \ln(1.04) \approx 24 \text{ years}$$

اکنون این پیشنهاد را به بانک ارایه می کنیم و امیدواریم که همکاری کند. دانستن ایـن فرمولهـا قطعـا ضـرری نـدارد. بلکـه سـطح آگاهی شما را در مراودات بانکی افزایش می دهد.

فرمولهای اقساط وام و وارون آن قطعا ساده نبوده و از این رو نیازی به حفظ کردن آنها نیست. اما برای استفاده از آنها نیازی نیست که حتمـا یک اقتصاددان حرفه ای باشید. بلکه تنها کافی است مقادیر را در آن وارد کرده و محاسبه کنید.

صفها

هیچ کسی معطل شدن در صف را دوست ندارد. اما تقریبا هر روز مجبوریم این کار را انجام دهیم: در بانـک، در مطـب پزشـک، در رسـتوران فست فود، در پمپ بنزین، و ... . در این بخش نگاهی دقیقتر به موضوع معطل ماندن در یک صف با چند پیشخوان می اندازیم، یعنی مـواردی که یک صف برای مشتریان وجود دارد و یک یا چند پیشخوان موجود است (تصویر را ملاحظه کنید).



فرمولهای این حالت، پیچیده و بسیار سودمنداند. ما به سه کمیت ورودی نیاز داریم: نرخ ورود λ (برحسب تعداد مشـتریان بـر واحـد زمـانی)، نرخ خدمات رسانی μ (مجددا برحسب تعداد مشتریان بر واحد زمانی) و تعداد پیشخوانها M. ابتدا حالتی را بررسی می کنـیم کـه تنهـا یـک پیشخوان وجود دارد، $M=1$. زمان متوسط انتظار T برای هر مشتری (برحسب واحد زمانی داده شده) برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{T = \lambda / (\mu \cdot (\mu - \lambda))}$$

با محاسبه این مقدار، به سادگی می توانیم تعداد متوسط مشتریان N را در صف به دست آوریم:

$$N = \lambda \cdot T$$

ابتدا با این فرمولهای نسبتا ساده مثالی را بررسی می کنیم و بعدا به فرمولهای پیچیده تر خواهیم پرداخت.

در مطب پزشک، بیماران با نرخ $\lambda=5$ بیمار در ساعت وارد می شود. پزشک می تواند به $\mu=6$ بیمار در هر ساعت رسیدگی کند. مدت زمان متوسط انتظار برای هر بیمار چقدر است؟ به طور متوسط چند نفر در اتاق انتظار خواهند بود؟

$$T = 5 / (6 \cdot 1) = 0.83 \text{ hours} = 50 \text{ minutes}$$
$$N = 5 \cdot 0.83 \approx 4$$

اکنون به بررسی حالتی می پردازیم که بیش از یک پیشخوان وجود داشته باشد. پیش از آنکه بتوانیم زمان انتظار را برآورد کنیم، لازم است تا احتمال p بدون مشتری بودن در سیستم را حساب کنیم:

$$1/p = \text{sum from } n=0 \text{ to } n=M-1 \text{ over } ((\lambda/\mu)^n / n!)$$

$$+ (\lambda/\mu)^M \cdot M \cdot \mu / (M \cdot \mu - \lambda) \cdot 1 / M!$$

قبلا گفته بودم که این فرمول پیچیده است! اگر معنی علامت تعجب در فرمول را نمی دانید بـه بخـش «توزیـع پواسـون» مراجعـه کنیـد تـا توضیحات لازم درباره تابع فاکتوریل را ببینید.

برای حالت خاص داشتن $M=2$ پیشخوان، فرمول پیچیده فوق به فرمول ساده تر زیر تبدیل می شود:

$$1/p = 1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2 \cdot 2 \cdot \mu / (2 \cdot \mu - \lambda) \cdot 0.5$$

پس از محاسبه p، می توانیم از این فرمول برای استخراج زمان انتظار T برای هر مشتری استفاده کنیم.

$$\mathbf{T = p \cdot \mu \cdot (\lambda/\mu)^M / ((M-1)! \cdot (M \cdot \mu - \lambda)^2)}$$

مجددا می توانیم این رابطه را برای $M=2$ پیشخوان ساده کنیم:

$$T = p \cdot \mu \cdot (\lambda/\mu)^2 / (2 \cdot \mu - \lambda)^2$$

خوشبختانه، رابطه تعداد متوسط مشتریان در صف، همان رابطه ساده $N=\lambda*T$ است. اکنون به یک مثال می پردازیم:

مجددا به همان مثال مطب پزشک با نرخ ورود $\lambda=5$ و نرخ خدمات رسانی $\mu=6$ بیمار در هر ساعت می پردازیم. پزشک احساس می کند کـه زمان انتظار 50 دقیقه زیاد بوده و از یک همکار دعوت می کند تا به او بپیوندد. اکنون $M=2$ پیشخوان وجود دارد. این اقدام چه تـاثیری بـر زمان انتظار و تعداد مشتریان در صف می گذارد؟

در ابتدا باید احتمال عدم وجود بیمار در سیستم (یعنی هیچ بیماری در اتاق انتظار و یا پیش پزشک وجود نداشته باشـد) را پیـدا کنـیم. مـی توانیم از رابطه ساده شده بهره گیریم:

$$1/p = 1 + 5/6 + (5/6)^2 \cdot 2 \cdot 6 / (2 \cdot 6 - 5) \cdot 0.5$$
$$1/p \approx 1 + 0.83 + 0.60 = 2.43$$
$$p = 0.41$$

اکنون می توانیم زمان متوسط انتظار T و تعداد متوسط افراد در اتاق انتظار را محاسبه کرد:

$$T = 0.41 \cdot 6 \cdot (5/6)^2 / (2 \cdot 6 - 5)^2$$
$$T \approx 0.03 \text{ hours} \approx 2 \text{ minutes}$$
$$N = 5 \cdot 0.03 \approx 0 \text{ people in waiting room}$$

بنابراین افزودن یک پیشخوان دیگر تفاوت چشمگیری ایجاد می کند، زمان انتظار را از ۵۰ دقیقه به کمتر از ۲ دقیقه می رساند و به نحو موثری اتاق انتظار را خالی می کند.

توجه داشته باشید که این فرمولها تنها زمانی کار می کند که $M^*\mu$ بزرگتر از λ باشد و به مشتریان بر اساس اصل «به نوبت» (اولین نفری که وارد می شود، اولین نفری است که خارج می شود) خدمت ارایه می شود. همچنین فرض می شود که هیچ مشتری پیش از آنکه به او خدمت ارایه شود صف را ترک نمی کند. اگر این حالت به طور مداوم اتفاق بیافتد، طول متوسط صف کوتاهتر از مقدار محاسبه شده خواهد بود.

بازیهای ریسک دار

هرگاه که دادوستدی انجام می دهیم، احتمال موفقیت و احتمال شکست در آن وجود دارد. اینکه نتیجه معامله چه باشد بستگی به عوامل زیادی دارد: مهارت ما، طرف دیگر معامله، شرایط بازار، تصمیم گیریهای سیاسی و غیره. یک فرمول ساده آماری می تواند با محاسبه مقدار انتظاری سود یا زیان در نحوه مواجهه با ریسک به ما کمک کند.

این فرمول بر مبنای توزیعهای احتمالی استوار است، بنابراین نیاز داریم تا ابتدا نگاهی به آنها داشته باشیم. در توزیع احتمالی (گسسته) تمامی خروجیهای ممکن به همراه احتمال آنها فهرست می شود. برای مثال، تصور کنید که بازی تاس به ما پیشنهاد می شود. ما مبلغ ۵ دلار را روی میز می گذاریم. اگر عدد شش آمد، کل آن مبلغ را به همراه ۲۰ دلار دیگر برمی داریم، وگرنه ۵ دلار را از دست می دهیم. از آنجا که احتمال شش آمدن تاس برابر با 1/6 است، حالات احتمال برای این بازی به شرح زیر است:

-5 $ با احتمال 5/6

20 $ با احتمال 1/6

توجه داشته باشید که در چنین توزیع احتمالاتی، مجموع احتمال حالات باید برابر با یک باشد. آیا این بازی ارزش بازی کردن دارد یا خیر؟ مقدار سود یا زیان انتظاری ما به ازای هر بازی چقدر است؟ فرض کنید که توزیع احتمالاتی با خروجیهای عددی n(1)، n(2)، n(3) و ... و احتمالات مربوطه آنها با مقادیر p(1)، p(2)، p(3)، و ... داده شده است. خروجی انتظاری به ازای هر بازی برابر است با:

$$\mathbf{e = n(1)\cdot p(1) + n(2)\cdot p(2) + n(3)\cdot p(3) + \ldots}$$

بنابراین کافی است همه خروجیهای عددی را با احتمال مرتبطشان در هم ضرب نموده و مجموع را محاسبه کنید. اکنون مقدار انتظاری را برای بازی تاس محاسبه می کنیم:

$$e = -5\ \$ \cdot 5/6 + 20\ \$ \cdot 1/6 \approx -0.83\ \$ \text{ per round}$$

بنابراین این بازی برای ما مطلوب نیست، در طی بازیهای مکرر، ما ضرر خواهیم کرد. اگر ۱۰۰ مرتبه بازی کنیم، انتظار می رود ۸۳ دلار را از دست بدهیم. از اینرو بهتر است این بازی را کنار بگذاریم.

به هر حال، با مفهوم مقدار انتظاری، تعریف بازی منصفانه بسیار ساده است. اگر $e=0$ باشد، بازی منصفانه است. در بازی فوق اگر پاداش آمدن عدد شش برابر با ۲۵ دلار باشد، بازی منصفانه خواهد بود. در این حالت ما داریم:

$$e = -5\ \$ \cdot 5/6 + 25\ \$ \cdot 1/6 = 0\ \$ \text{ per round}$$

این حالت نه به نفع باز کننده و نه به نفع کازینو است. اکنون به بررسی چند مثال بپردازیم.

یک شغل تجاری می خواهد ۱۰۰ هزار دلار از بانک با نرخ بهره ۶ درصد قرض کند. احتمال شکست این شغل برابر با ۸ درصد برآورد شده است. آیا بانک با این پیشنهاد وام موافقت کند؟ برای پاسخ به این مساله، نگاهی به توزیع احتمالات می پردازیم. اگر

وام برگردانده شود، بانک مبلغ $ 6000 = $ 0.06*100000 به دست می آورد. اگر شغل با شکست مواجه شود، بانک مبلغ $ 100000 را از دست می دهد.

$ 100000- با احتمال 0.08

$ 6000 با احتمال 0.92

نگاهی به مقدار انتظاری می اندازیم که برای این مساله سود یا زیان انتظاری می باشد.

$$e = -100{,}000\ \$ \cdot 0.08 + 6000\ \$ \cdot 0.92$$
$$\approx -2480\ \$\ \textit{per credit}$$

بنابراین برای بانک این سرمایه گذاری مطلوب نیست، به دلیل بالا بودن احتمال شکست، نرخ بهره کافی نیست. در اینجا ارتباط میان نرخ بهره و احتمال ریسک به خوبی دیده می شود.

مجددا شغل پیشین می خواهد از بانک مبلغ $ 100000 را قرض بگیرد و احتمال شکست آن برابر با ۸ درصد است. بانک باید نرخ بهره i را چقدر بگیرد تا انتظار دریافت ۱۰۰۰ دلار از این سرمایه گذاری را داشته باشد؟

مجددا، نگاهی به توزیع احتمالات می اندازیم. اگر قرض برگردانده شود، بانک مبلغ $ i*100000 را به دست می آورد و اگر شغل با شکست مواجه شود مبلغ $ 100000 را از دست می دهد.

$ 100000- با احتمال 0.08

$ i*100000 با احتمال 0.92

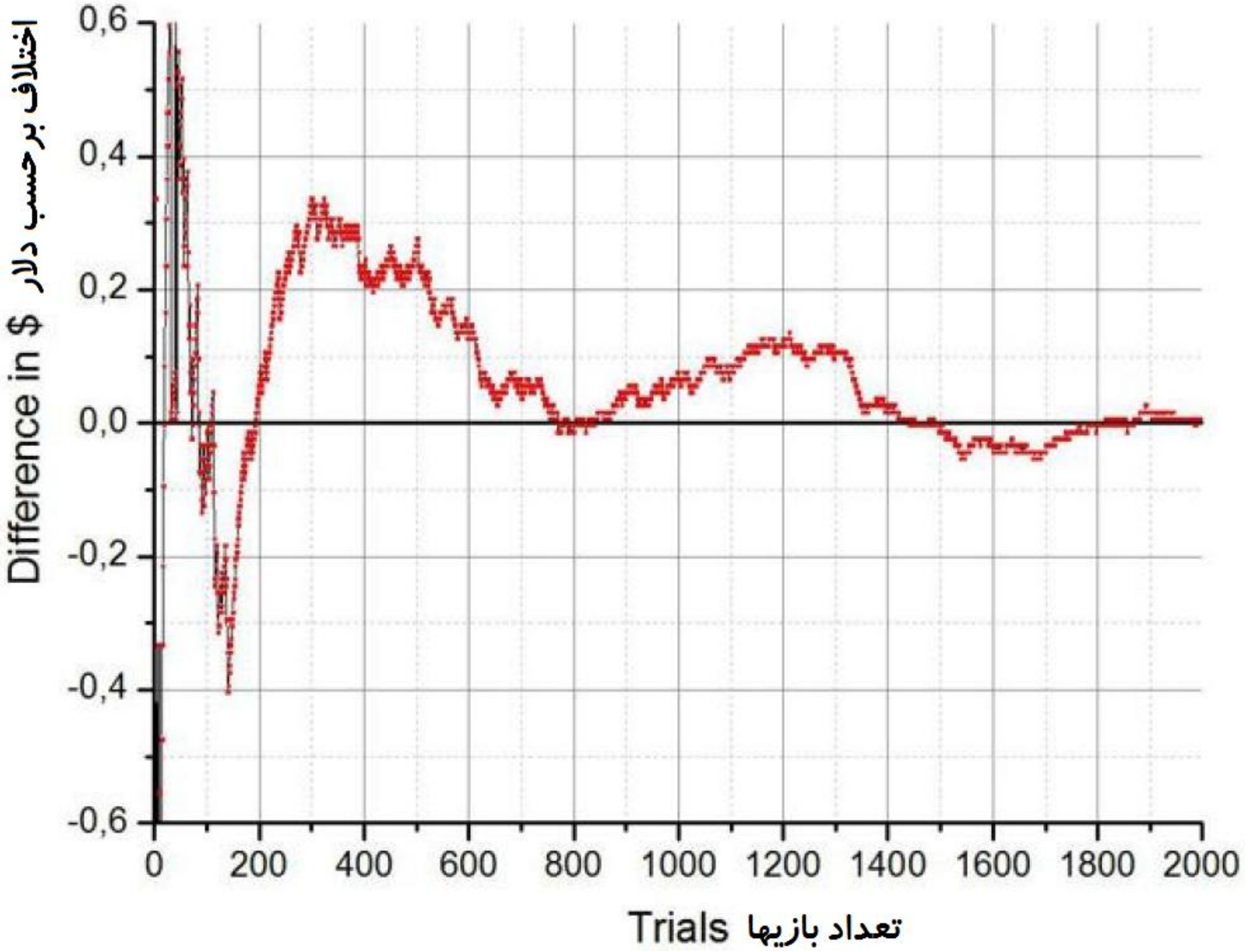
از آنجا که می خواهیم مقدار انتظاری $ 1000 را داشته باشیم، این مقدار را در فرمول قرار داده و این معادله را حل می کنیم:

$$1000 = -100{,}000 \cdot 0.08 + i \cdot 100{,}000 \cdot 0.92$$
$$1000 = -8000 + i \cdot 92{,}000$$
$$9000 = i \cdot 92{,}000$$
$$i \approx 0.1 = 10\ \%$$

باید توجه داشت که مقدار انتظاری عددی است که در درازمدت به دست می آید. در بازی تاس در مثال اولیه، شما ممکن است علیرغم منفی بودن مقدار انتظاری، سود کنید. اگر تنها دو بار بازی کنید و هر دو را برنده شوید، مبلغ $ 40 به دست خواهید آورد.

مقدار انتظاری به ما می گوید پس از انجام بازیهای متعدد، چه نتیجه ای به طور متوسط حاصل می شود. به لحاظ ریاضی ثابت می شود (قانون اعداد بزرگ) که همچنان که تعداد بازیها افزایش می یابد، بدون استثناء، مقدار واقعی عدد انتظاری به مقدار محاسبه شده آن همگرا می شود.

تصویر زیر تفاوت میان سود واقعی در هر بازی تاس که از شبیه سازی تصادفی کامپیوتری به دست آمده است را با مقدار محاسبه شده آن از فرمول نشان می دهد. این همگرایی کاملا واضح است. هرچه تعداد بازیها بیشتر شود، این اختلاف کمتر می شود. این نمونه ای از کاربرد قانون اعداد بزرگ است.



مراجع

1. http://www.physicsclassroom.com/class/sound/u11l2b.cfm
2. http://hypertextbook.com/facts/1998/ManicaPiputbundit.shtml
3. http://theholog rid.files.wordpress.com/2012/11/479px-inverse_square_law-svg.png
4. www.iucaa.in/~dipankar/ph217/contrib/shock.pdf
5. upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/78/Trinity_Test_Fireball_16ms.jpg
6. inflight.squarespace.com/storage/post-images/WOWC_IFUSA_16.jpg
7. www.phy.davidson.edu/fachome/dmb/py115/ReverbCalc.html
8. valy.1ka.eu/DIY/soundsystem/_upload_by_VeeHell/know2how/Audio_Tutorials_Library_
9. thetechopensource.thetech.org/sites/default/files/imagecache/large/4369/doppler
10. Adam, John A. (2003) *Mathematics in Nature*. Princeton, New Jersey: Princeton
11. geography.about.com/od/lists/a/hurrcategories.htm
12. http://www.eoearth.org/view/article/156717/
13. www.ijciis.org/articles/2012/2/3/images/IntJCritIllnInjSci_2012_2_3_135_100890_u3.jpg
14. Haberman, Richard (1977) *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

15. Tipler, Paul A. (2008) *Physics for Scientists and Engineers*. New York: W. H. Freeman
16. http://www.learner.org/courses/physics/unit/text.html?unit=3&secNum=3
17. http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm
18. http://www.aquaphoenix.com/lecture/matlab5/images-large/drag_coefficients.jpg
19. www.unfallaufnahme.info/uebersichten-listen-und-tabellen/geschwindigkeiten-und
20. Dobrinski, Paul (1993) *Physik für Ingenieure*. Stuttgart, Baden-Württemberg: B. G.
21. www.calctool.org/CALC/phys/newtonian/centrifugal.png
22. www.voiceworks.org.uk/uploads/forces_on_satellite_2.jpg
23. http://edition.cnn.com/2013/06/28/tech/social-media/apparently-this-matters-roller
24. Warren, Phillips F. (2010) *Mechanics of Flight*. Hoboken, New Jersey: John Wiley
25. quest.nasa.gov/aero/teachers/foa.html
26. http://www.dutchops.com/Portfolio_Marcel/Articles/Aerodynamics/Forces/Forces/Acting_
27. alpcentauri.info/rifle_recoil.html
28. revisionworld.co.uk/a2-level-level-revision/physics/force-motion/momentum-second
29. Feynman, Richard P. (2011) *The Feynman Lectures on Physics, Volume I*. New York:
30. http://www.micheloud.com/FXM/flying/enduranc.htm
31. http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/science/images/ph_energy23.gif
32. http://www.cssforum.com.pk/attachments/css-optional-subjects/group
33. Friedman, Mel (2009) *Geometry Workbook (Mathematics Learning and Practice)*.
34. http://syllabus.bos.nsw.edu.au/assets/mathematicsk10/images/cosine.png
35. teamikaria.com/hddb/dl/JEFJJRF15WA9TM5Z63K5JRHREJ.jpg
36. plants.ifas.ufl.edu/manage/sites/default/files/01_algae_06.jpg
37. plus.maths.org/content/perfect-harmony
38. http://www.basic-mathematics.com/geometric-sequence-calculator.html
39. http://www.usciences.edu/~lvas/Math101/Geom_Series.pdf
40. http://www.math.niu.edu/~richard/Math302/ch1sec5.pdf
41. Haller, Sabine (2010) *Dienstleistungsmanagement*. Wiesbaden, Hessen: Gabler, GWV
42. ch302.cm.utexas.edu/images302/half-life-graph.jpg